

SÉRIE A, N° 290.
N° D'ORDRE
944.

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES PHYSIQUES.

PAR

M. Ch. MAURAIN.

1^{re} THÈSE. — RECHERCHES SUR LES ÉCRANS ÉLECTROMAGNÉTIQUES
ET L'INFLUENCE DE LA FRÉQUENCE SUR L'ÉNERGIE
DISSIPÉE DANS L'AIMANTATION.

2^e THÈSE. — PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

Soutenues le 14 février 1898, devant la Commission d'Examen.

MM. BOUTY, *Président.*

DUCLAUX, {
DELLAT, { *Examineurs.*

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS ET FILS, IMPRIMEURS-LIBRAIRES
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
Quai des Grands-Augustins, 55.

1898

SÉRIE A, N° 290.
N° D'ORDRE
944.

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES PHYSIQUES.

PAR

M. Ch. MAURAIN.

1^{re} THÈSE. — RECHERCHES SUR LES ÉCRANS ÉLECTROMAGNÉTIQUES
ET L'INFLUENCE DE LA FRÉQUENCE SUR L'ÉNERGIE
DISSIPÉE DANS L'AIMANTATION.

2^e THÈSE. — PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

Soutenues le 14 février 1898, devant la Commission d'Examen.

MM. BOUTY, *Président.*

DUCLAUX, }
PELLAT, } *Examineurs.*



PARIS,

GAUTHIER-VILLARS ET FILS, IMPRIMEURS-LIBRAIRES
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
Quai des Grands-Augustins, 55.

1898

UNIVERSITÉ DE PARIS.

FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS.

	MM.	
Doyen.....	DARBOUX, Professeur...	Géométrie supér.
Professeur honoraire..	HERMITE,	
	DE LACAZE-DUTHIERS.	Zoologie, Anatomie Physiol. comparée.
	TROOST.....	Chimie.
	FRIEDEL.....	Chimie organique.
	LIPPMANN.....	Physique.
	HAUTEFEUILLE.....	Minéralogie.
	BOUTY.....	Physique.
	APPELL.....	Mécanique rationn.
	DUCLAUX.....	Chimie biologique.
	BOUSSINESQ.....	Calcul des probabi- lités, Physique ma- thématique.
	PICARD.....	Analyse supérieure et Algèbre supér.
Professeurs.....	POINCARÉ.....	Astronomie mathé- matique et Méca- nique céleste.
	YVES DELAGE.....	Zoologie, Anatomie, Physiol. comparée.
	BONNIER.....	Botanique.
	DASTRE.....	Physiologie.
	DITE.....	Chimie.
	MUNIER-CHALMAS.....	Géologie.
	GIARD.....	Zoologie, Évolution des êtres organisés.
	WOLF.....	Astronomie phys.
	KOENIGS.....	Mécanique phys. et expérimentale.
	VÉLAIN.....	Géographie phys.
	GOURSAT.....	Calcul différentiel et Calcul intégral.
	CHATIN.....	Zoologie, Anatomie. Physiol. comparée.
Professeurs adjoints..	PELLAT.....	Physique.
	PUISEUX.....	Mécanique et Astro- nomie.
Secrétaire.....	FOUSSEREAU.	

PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS ET FILS,
Quai des Grands-Augustins, 55.

A

MONSIEUR E. MASCART,

MEMBRE DE L'INSTITUT.

Hommage de respectueuse reconnaissance.

PREMIÈRE THÈSE.

RECHERCHES

SUR LES

ÉCRANS ÉLECTROMAGNÉTIQUES

ET

L'INFLUENCE DE LA FRÉQUENCE

SUR L'ÉNERGIE DISSIPÉE DANS L'AIMANTATION.

Lorsqu'un corps conducteur est en mouvement par rapport à un champ magnétique, il se produit dans ce corps des courants d'induction qui l'échauffent; de plus, si le conducteur est magnétique, la variation de l'aimantation induite entraîne, par suite du phénomène de l'hystérésis, une perte d'énergie qui se traduit également par un dégagement de chaleur.

L'étude de cette dernière perte d'énergie est rendue doublement difficile par le rôle des courants induits : d'une part l'énergie que ceux-ci mettent en jeu vient s'ajouter à la précédente, de sorte que la quantité d'énergie qu'on mesure habituellement est la somme de deux parties très difficiles à séparer; d'autre part, l'action protectrice qu'ils exercent sur l'intérieur de la masse magnétique cause une diminution progressive du champ à partir de la surface, et fait ainsi varier dans de larges limites l'énergie dissipée du fait de l'aimantation seulement.

Il est vrai qu'on peut étudier la dissipation d'énergie

dans l'aimantation au moyen d'expériences statiques, c'est-à-dire dans lesquelles le champ varie lentement ou par bonds successifs, mais dans les applications on a affaire à des variations beaucoup plus rapides, et les complications dues à la présence des courants induits se font sentir.

Dans ce Travail, nous étudierons d'abord l'action protectrice des courants induits, puis l'influence de la fréquence sur l'énergie dissipée dans un noyau magnétique placé dans un champ variable.

PREMIÈRE PARTIE.

SUR LES ÉCRANS ÉLECTROMAGNÉTIQUES.

Le rôle des corps conducteurs comme écrans magnétiques dépend de leur nature et aussi du champ magnétique dans lequel ils se trouvent placés.

1° Lorsqu'il s'agit d'un champ magnétique constant, l'interposition de conducteurs non magnétiques ne modifie nullement celui-ci; les corps magnétiques s'aimantent par influence et modifient par suite le champ, ce changement dépendant uniquement de leur forme et de leur perméabilité magnétique.

2° Lorsqu'il s'agit d'un champ variable, il se produit dans un conducteur quelconque des courants d'induction de sens tel qu'ils tendent à diminuer le champ magnétique moyen à l'intérieur du conducteur; l'intensité et le mode de distribution de ces courants dépendent non seulement de la forme du corps et de ses propriétés magnétiques, mais aussi de sa conductibilité, et de la rapidité de la variation du champ.

La question a été étudiée au point de vue théorique dans le cas de conducteurs non magnétiques, ou, ce qui revient au même, de conducteurs dont on suppose con-

stante la perméabilité magnétique ⁽¹⁾; mais la variation de cette perméabilité avec la valeur du champ introduit des difficultés telles que le problème n'est nullement résolu pour le fer, le nickel et le cobalt.

Nous nous occuperons seulement ici du deuxième cas, celui du champ magnétique variable.

I. — HISTORIQUE.

On sait depuis longtemps qu'on peut protéger, d'une façon plus ou moins complète, une certaine région contre les actions électromagnétiques variables, en l'entourant d'un corps conducteur, mais peu d'expériences précises ont été faites à ce sujet. Hughes ⁽²⁾ plaçait à une petite distance l'une de l'autre deux bobines; dans le circuit de la première se trouvait une pile et un microphone, et dans celui de la seconde un téléphone. Les sons se transmettaient d'un circuit à l'autre, mais l'interposition de lames métalliques entre les deux bobines les affaiblissait jusqu'à les intercepter complètement si les lames étaient assez épaisses. L'auteur ne fait d'ailleurs pas d'étude plus approfondie de cette action des corps conducteurs, et se borne à indiquer que, dans les conditions où il opère, elle est plus marquée avec le cuivre qu'avec le fer.

Willoughby Smith ⁽³⁾ a fait des expériences du même genre, mais beaucoup plus étendues. Deux spirales plates de fil de cuivre isolé sont reliées, la première à une pile, un commutateur permettant de fermer et d'ouvrir périodiquement.

⁽¹⁾ LARMOR, *Phil. Mag.*, (5), t. XVII, p. 1; 1884. — Lord RAYLEIGH, *Phil. Mag.* (5), t. XXI, p. 381; 1886. — STEFAN, *Wied. Ann.*, t. XLI, p. 400; 1890. — J.-J. THOMSON, *Recent Researches in El. and Magn.*, p. 251, Oxford; 1893.

⁽²⁾ HUGHES, *Comptes rendus*, t. LXXXVIII, p. 122; 1879.

⁽³⁾ WILLOUGHBY SMITH, *Journ. of the Soc. of tel. eng. and electr.*, t. XII, p. 457; 1884.

diquement le circuit, et la deuxième à un galvanomètre; les courants induits alternativement dans les deux sens sont envoyés dans la même direction au galvanomètre, au moyen d'un commutateur en relation mécanique avec le premier. On observe, lorsque les interruptions sont assez fréquentes, une déviation permanente du galvanomètre. En interposant des lames métalliques carrées, un peu plus grandes que les spirales, on fait diminuer la déviation du galvanomètre, cette diminution étant variable avec la nature du métal et le nombre des renversements par minute; pour le fer, la diminution, très forte dès le début, reste à peu près constante à partir d'environ 700 renversements, tandis qu'elle croît moins rapidement, mais d'une façon continue, pour les autres métaux. Parmi ceux-ci, c'est pour le cuivre que la diminution est la plus forte et croît le plus rapidement.

Lord Kelvin ⁽¹⁾ a étudié le cas particulier où l'action d'un aimant fixe est modifiée par la rotation d'un cylindre conducteur entourant l'aimant.

En somme, il n'a pas encore été fait sur les écrans électromagnétiques d'expériences suivies dans des conditions bien déterminées. Je me suis proposé d'étudier la protection qu'exercent, sur un point intérieur, des cylindres conducteurs creux, placés dans un champ magnétique uniforme, d'intensité périodiquement variable, parallèle aux génératrices des cylindres; ce champ magnétique était réalisé au moyen d'une bobine parcourue par un courant alternatif.

Le mécanisme de l'action protectrice est ici aussi simple que possible : il se développe dans les cylindres des cou-

(¹) Sir W. THOMSON, *Proceed. of the Roy. Soc. of London*, t. XLIX, p. 418; 1891.

rants induits circulaires, dont l'action s'oppose à celle du champ primitif; si l'on suppose le cylindre de longueur infinie, le champ a la même valeur en tous les points de la cavité intérieure; soit H' sa valeur moyenne pour un de ces points, et H la valeur moyenne du champ à la surface extérieure du cylindre; si les courants induits n'existaient pas, le rapport $\frac{H'}{H}$ serait égal à l'unité; mais, à cause de leur action, H' est inférieur à H ; le rapport $\frac{H'}{H}$ est donc plus petit que 1; la quantité $1 - \frac{H'}{H}$, nulle en l'absence des courants induits, sera, lorsque leur action s'exercera, une quantité d'autant plus grande que cette action protectrice sera plus intense: pour simplifier le langage je désignerai dans la suite la quantité $1 - \frac{H'}{H}$ sous le nom de *protection* due à un cylindre.

Nous chercherons d'abord à nous rendre compte de l'allure générale du phénomène, et nous verrons ensuite comment les résultats s'accordent avec ces prévisions.

II. — MODE D'ACTION DES ÉCRANS ÉLECTROMAGNÉTIQUES.

1° *Conducteurs non magnétiques.* — L'intensité des courants induits, de laquelle dépend la protection, augmente avec la conductibilité; elle augmente aussi avec la fréquence, car plus celle-ci est grande, plus la force électromotrice induite est considérable. La protection sera donc d'autant plus grande que la fréquence sera plus élevée et la conductibilité du cylindre plus considérable; elle sera d'ailleurs indépendante de l'amplitude du champ magnétique variable, le mode de répartition des courants induits ne dépendant aucunement de l'amplitude.

2° *Conducteurs magnétiques.* — A conductibilité égale, un conducteur magnétique sera meilleur écran qu'un con-

ducteur non magnétique, parce que, le flux d'induction étant plus grand dans le premier, les courants induits y seront plus intenses.

D'ailleurs, l'intensité du champ, qui ne jouait aucun rôle dans le cas précédent, acquiert ici une grande importance, à cause de la variation de la perméabilité magnétique, qui croît rapidement avec le champ, atteint un maximum très net et décroît ensuite de plus en plus lentement.

Si les variations périodiques du champ H restaient localisées entre deux valeurs voisines H_1 et H_2 , la protection suivrait à peu près la même marche que la perméabilité; pour des valeurs suffisamment élevées de H_1 et de H_2 , la perméabilité tendant vers l'unité, le fer se comporterait comme une substance non magnétique de même conductibilité.

Mais en général les choses ne se passent pas ainsi, parce que les champs variables, produits par des courants alternatifs, oscillent entre des valeurs égales et de signes contraires, de sorte qu'on a à considérer non une valeur à peu près constante de la perméabilité, mais des valeurs différant entre elles d'une façon très considérable; il est d'autant plus difficile de connaître exactement ces variations de la perméabilité que cette quantité dépend non seulement de la valeur du champ à un moment donné, mais encore des valeurs antérieures, et est ainsi mal définie.

On peut cependant prévoir approximativement le mode d'action d'un écran dans ces conditions : appelons $\pm H_m$ les limites entre lesquelles varie le champ; lorsque H_m ne comprend pas la valeur du champ correspondant au maximum de la perméabilité, la valeur moyenne de celle-ci pendant une période croît avec H_m ; elle continue à croître lorsque le maximum est dépassé, mais atteint elle-même un maximum et décroît ensuite, puisque, en aug-

mentant suffisamment H_m , on arriverait à une variation pendant la plus grande partie de laquelle la perméabilité aurait une valeur décroissante. La protection devra donc croître d'abord en fonction de H_m , présenter un maximum, puis décroître, ses variations étant beaucoup moins accentuées que celles de la perméabilité.

On peut opérer dans des conditions plus simples de la façon suivante : le champ est la somme d'un champ constant produit par un courant continu et d'un faible champ variable produit par un courant alternatif; en laissant ce dernier fixe, et en faisant varier l'intensité du courant continu, on peut arriver à placer les variations dans telle région qu'on le veut de la courbe de perméabilité.

De plus, la variation de la perméabilité influe sur la manière dont se comporte un écran, le champ périodique utilisé restant le même, lorsqu'on fait varier l'épaisseur de l'écran ou la fréquence du courant alternatif employé.

En effet, l'amplitude du champ magnétique diminue à partir de la surface extérieure de l'écran, à cause de l'action protectrice des courants induits, et de façon différente suivant la valeur de l'amplitude à la surface : si cette valeur est inférieure à celle du champ qui correspond au maximum de la perméabilité, la valeur moyenne de la perméabilité diminuera de plus en plus à partir de la surface, tandis que, dans le cas contraire, la perméabilité moyenne augmentera d'abord pour diminuer ensuite.

Lorsque la fréquence varie, la rapidité de la décroissance du champ variant par là même, on pourra, pour une même épaisseur de l'écran, avoir ou non les deux phases précédentes dans la variation de la perméabilité moyenne.

J'ai cherché, en étudiant plus particulièrement l'influence de la fréquence, à vérifier les conclusions précédentes.

III. — DISPOSITION DES EXPÉRIENCES.

Pour mesurer le champ magnétique variable existant à l'intérieur des cylindres, j'ai employé le courant produit, par l'action de ce champ, dans de petites bobines concentriques à la bobine magnétisante et aux cylindres; ce courant était lui-même mesuré au moyen d'un appareil qui sera décrit plus loin. L'intensité efficace du courant alternatif primaire étant maintenue constante, il suffit de comparer les intensités efficaces du courant induit dans la bobine secondaire, suivant qu'on opère avec ou sans écran.

L'amplitude de l'intensité du courant induit est proportionnelle à l'amplitude de la force électromotrice et par suite à celle du champ variable qui lui donne naissance, en supposant ces quantités représentées par des fonctions sinusoïdales; d'ailleurs la déviation de l'appareil au moyen duquel on mesure le courant secondaire est proportionnelle au carré de l'amplitude de l'intensité; si donc on appelle δ' et δ les déviations obtenues respectivement avec et sans écran, la quantité $\sqrt{\frac{\delta'}{\delta}}$ mesurera le rapport $\frac{H'_m}{H_m}$ des amplitudes des champs intérieur et extérieur, de sorte que la protection sera représentée, d'après la définition donnée plus haut, par la quantité $1 - \sqrt{\frac{\delta'}{\delta}}$ (¹).

Nous verrons plus loin jusqu'à quel point les suppositions faites ici sont réalisées.

Lorsqu'il s'agit d'écrans magnétiques, il y a à considérer l'influence perturbatrice de l'aimantation induite; si la bobine magnétisante était infinie, ainsi que le cylindre

(¹) Dans la représentation des résultats obtenus, la quantité $\sqrt{\frac{\delta'}{\delta}}$ sera toujours, dans ce qui va suivre, portée en ordonnées, de sorte que la protection sera représentée par la distance d'un point de la courbe à la droite horizontale d'ordonnée égale à 1.

écran, celui-ci, étant placé suivant un tube de force du champ, ne modifierait pas, du fait de son aimantation induite, le champ créé par la bobine. On peut réaliser cette condition en opérant avec une bobine annulaire en forme de tore, ou encore, d'une façon approximative, avec une bobine suffisamment allongée. J'ai utilisé, dans le cas du fer, ces deux dispositions, mais nous verrons que, dans la seconde, l'influence du champ démagnétisant était encore considérable.

Dans l'étude des écrans non magnétiques, ces difficultés n'existaient plus; j'ai donc employé une bobine beaucoup plus courte, donnant cependant, comme nous le verrons, un champ sensiblement uniforme dans la région occupée par la bobine secondaire.

IV. — ÉTUDE DU COURANT ALTERNATIF.

Dans ces expériences, comme dans celles qui suivront, j'ai employé le courant fourni par un alternateur Gramme à huit pôles, actionné par un moteur Gramme à courant continu; on pouvait avec ce moteur, et au moyen de différentes poulies, faire varier dans de larges limites la vitesse de l'alternateur et par suite la fréquence. La vitesse était mesurée au moyen d'un compteur de tours.

La forme du courant dépend naturellement de la nature du circuit; nous verrons, dans la deuxième Partie de ce Travail, que dans certains cas cette forme est très irrégulière; mais, dans tous les cas réalisés dans l'étude des écrans électromagnétiques, la forme est peu différente d'une sinusoïde. J'ai employé pour la déterminer la méthode de M. Joubert: on mesure la différence de potentiel qui existe entre les extrémités d'une résistance sans self-induction sensible faisant partie du circuit; pour cela l'une des extrémités est mise en communication permanente avec le sol, et l'autre, par l'intermédiaire d'un contact périodique,

avec l'aiguille d'un électromètre dont les deux paires de quadrants sont portées à des potentiels égaux et de signes contraires.

Le contact est réalisé au moyen d'un cercle divisé monté sur l'axe de l'alternateur, et portant une alidade mobile qu'on peut fixer au moyen de vis de pression; l'extrémité de cette alidade vient frotter légèrement à chaque tour sur l'extrémité en forme de V d'un ressort latéral fixe; elle est taillée en biseau, de manière que le contact ait lieu seulement pendant un temps très court. (Il est nécessaire, lorsqu'on emploie, comme je l'ai fait, un électromètre, d'éviter tout frottement sur un diélectrique, car l'électricité produite dans ce frottement trouble les mesures.) Une rotation de 90° de l'alidade correspond à une période, l'alternateur étant à huit pôles ⁽¹⁾.

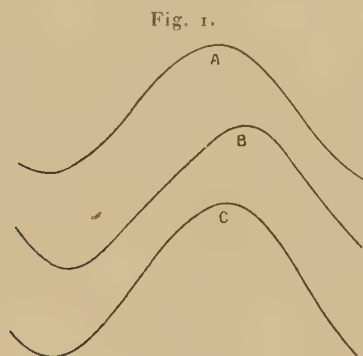
Pour mesurer correctement la différence de potentiel considérée, il faut se débarrasser d'une force électromotrice parasite provenant de ce que l'aiguille de l'électromètre n'est pas formée du même métal que le circuit; quant à l'effet thermo-électrique qui peut être produit par le frottement du contact tournant, il a ici une action négligeable; elle serait d'ailleurs éliminée, comme la précédente, par le procédé de mesure adopté: on fait une double lecture en renversant les communications, de manière que la différence des lectures représente exactement le double de la différence de potentiel à mesurer; on se servait à cet effet de godets à mercure bien isolés et de deux ponts métalliques.

Il importe que toutes les parties du dispositif soient parfaitement isolées, sans quoi la déviation de l'électromètre reste inférieure à celle qui mesurerait la différence

(1) J'ai beaucoup à remercier M. Janet, qui a bien voulu mettre à ma disposition un appareil construit pour le Laboratoire central d'Électricité.

de potentiel en jeu ; on peut s'assurer que la disposition est bonne de la façon suivante : on fait passer dans le circuit un courant continu, et l'on mesure la différence de potentiel aux extrémités de la résistance en établissant la communication avec l'électromètre d'abord par un fil métallique continu, puis par l'intermédiaire du contact tournant ; on doit, dans les deux cas, obtenir la même déviation ; dans mes expériences, le cercle gradué était fixé sur l'axe de l'alternateur au moyen de trois pièces d'ébonite ; les bobines étaient placées sur des gâteaux de paraffine, et les fils suspendus ou supportés par l'intermédiaire de cylindres de paraffine ; dans ces conditions le fonctionnement est très satisfaisant.

Voici les nombres obtenus dans les différentes expériences, et au moyen desquels ont été construites les courbes de la *fig. 1*.



1° Circuit comprenant une résistance sans self-induction d'une centaine d'ohms, une bobine de 1^m,15 de longueur, qui a servi aux expériences décrites plus loin, et qui comprend 4400 spires de fils, la valeur moyenne de la section étant d'environ 21^{cmq}, enfin un rhéostat de réglage d'une dizaine d'ohms.

Les nombres de la première ligne horizontale repré-

sentent les angles dont le contact a tourné par rapport à l'alternateur, c'est-à-dire une quantité proportionnelle au temps, et ceux de la deuxième la différence des lectures faites à l'électromètre.

Courbe A.	0	5	10	15	20	25	30
	-79,2	-88,7	-85,7	-71,5	-51,9	-25,3	+8,4
	35	40	45	50	55	60	65
	+38,5	+62,2	+80	+88,6	+84,6	+68,8	+49,2
	70	75	80	85	90		
	+18,3	-14,1	-44,3	-66,6	-83,5		

2° Même circuit, mais en plaçant à l'intérieur de la bobine le plus gros des cylindres de fer qui ont été employés (1^m, 20 de longueur, 3^{cm}, 6 de diamètre et 0^{cm}, 15 d'épaisseur).

Courbe B.	0	5	10	15	20	25	30
	-18	-29,7	-37,4	-40,1	-35,7	-25,9	-13,8
	35	40	45	50	55	60	65
	-1,1	+8,1	+19,2	+30,5	+38	+39,9	+35,1
	70	75	80	85	90		
	+24	+10,2	+1,3	-10,7	-21,5		

3° On a substitué à la grande bobine une bobine plus courte à huit couches de fil, et placé à l'intérieur de cette bobine le plus gros des cylindres de cuivre utilisés, dont les dimensions seront données plus loin.

Courbe C.	0	5	10	15	20	25	30
	-30,65	-38,9	-42,5	-39,9	-32,35	-22,05	-7,8
	35	40	45	50	55	60	
	+8,2	+21,35	+32,35	+39,75	+42,55	+38,95	
	65	70	75	80	85	90	
	+30,7	+19,5	+4,65	-10,95	-23,9	-33,95	

On voit que ces courbes sont très régulières, même celle qui correspond à la présence du cylindre de fer dans la bobine; nous verrons plus loin d'autres exemples dans

lesquels la forme des courbes a subi de notables modifications.

Mesure de l'intensité efficace du courant. — Cette mesure était faite par la méthode électrométrique de M. Joubert, qui m'a toujours donné d'excellents résultats : les deux extrémités d'une résistance sans self-induction sensible faisant partie du circuit sont reliées : l'une, à l'une des paires de quadrants d'un électromètre; l'autre, à la deuxième paire de quadrants et à l'aiguille. On peut ainsi mesurer le carré moyen de la différence de potentiel qui existe entre les deux extrémités de la résistance, c'est-à-dire une quantité proportionnelle au carré de l'intensité efficace du courant.

Les résistances employées étaient constituées par des fils de maillechort recouverts de soie, qui avaient été repliés sur eux-mêmes, avant d'être enroulés sur une bobine; en donnant dans chaque cas une valeur convenable à la résistance aux extrémités de laquelle on prend la différence de potentiel, on pouvait obtenir une déviation assez considérable pour être susceptible d'être mesurée avec précision; d'ailleurs, dans la plupart des expériences, il s'agissait seulement de maintenir l'intensité efficace constante, et par suite la déviation invariable.

Les indications de l'électromètre ne sont pas tout à fait proportionnelles aux carrés de la différence de potentiel, à cause de la force électromotrice résultant de ce que les quadrants et l'aiguille ne sont pas formés du même métal.

On peut cependant mesurer correctement le carré de la différence de potentiel, au moyen d'une double lecture; en effet, désignons par V_1 et V_2 les potentiels des deux paires de quadrants; celui de l'aiguille, au lieu d'être V_1 , sera $V_1 + \varepsilon$, et l'expression générale de la déviation devient

$$\begin{aligned}\delta &= \alpha (V_1 - V_2) \left(V_1 + \varepsilon - \frac{V_1 + V_2}{2} \right) \\ &= \frac{\alpha}{2} (V_1 - V_2)^2 + \alpha \varepsilon (V_1 - V_2);\end{aligned}$$

si l'on intervertit les communications, les potentiels respectifs deviennent V_1 , V_2 et $V_2 + \varepsilon$, et l'on aura

$$\delta' = \alpha(V_2 - V_1) \left(V_2 + \varepsilon - \frac{V_2 + V_1}{2} \right) = \frac{\alpha}{2} (V_1 - V_2)^2 - \alpha \varepsilon (V_1 - V_2),$$

de sorte que la somme $\delta + \delta'$ mesure $(V_1 - V_2)^2$.

Pendant une série d'expériences, dans lesquelles je faisais varier l'intensité du courant, j'avais dans certains cas besoin de lire rapidement la position de l'image; pour éviter alors une double lecture, j'ai gradué l'électromètre au moyen d'éléments Gouy et, pour les plus fortes différences de potentiel, d'accumulateurs comparés aux éléments Gouy à l'aide de l'électromètre. Les déviations δ se représentent avec une approximation très suffisante par la formule

$$\delta = 0,0474[(V_1 - V_2)^2 + 0,84(V_1 - V_2)],$$

les V étant exprimés en volts; je me suis alors servi, pour la mesure de l'intensité efficace, d'une courbe à grande échelle construite au moyen de la graduation précédente; j'ai vérifié que, pendant la durée de ces expériences, la sensibilité de l'électromètre est restée très sensiblement la même.

V. — MESURE DU COURANT SECONDAIRE.

L'appareil employé devait être assez sensible pour permettre la mesure des faibles courants produits dans la bobine secondaire.

J'ai d'abord étudié un électrodynamomètre de M. C. Ader, construit pour la mesure des courants téléphoniques, et dans lequel on utilise la répulsion de deux petites bobines, l'une fixe, l'autre placée à l'extrémité d'une tige mobile autour d'un axe; mais je n'ai pu obtenir de résultats bien concordants.

Après quelques autres essais, j'ai employé la disposi-

tion suivante, déjà utilisée par plusieurs physiciens, en particulier dans les appareils Bellati-Giltay, et qui m'a donné de bons résultats : les aiguilles d'un galvanomètre de Nobili étant enlevées, l'aiguille intérieure a été remplacée par un petit cylindre de fer doux, de 4^{cm} de longueur et 1^{mm} de diamètre. Le champ variable produit par le passage d'un courant alternatif dans la bobine fait naître dans le fer doux une aimantation induite qui change de sens avec lui, de sorte que le couple est toujours de même sens.

Dans les appareils Bellati-Giltay, la tige de fer doux est maintenue dans un plan normal au méridien magnétique au moyen d'une suspension bifilaire, de manière à éviter toute action du champ magnétique terrestre. Cette disposition ne me paraît pas nécessaire : en effet, supposons la tige dans une position quelconque par rapport au méridien magnétique ; le champ terrestre produit alors une certaine aimantation induite sur laquelle il exerce une action ; s'il y a équilibre, c'est que cette action est compensée par une autre force, une torsion par exemple ; le champ variable produit par le courant alternatif a une influence totale nulle sur l'aimantation induite par le champ terrestre, puisqu'il donne lieu à des actions égales alternativement dans les deux sens ; de même l'action du champ terrestre sur l'aimantation induite par le champ variable a une somme nulle ; la seule action est donc celle du champ variable sur l'aimantation induite qu'il produit.

En particulier, on peut placer la tige de fer dans le méridien, position d'équilibre qu'elle prend d'elle-même quand la torsion du fil de suspension est nulle ; c'est cette disposition que j'ai adoptée, en plaçant l'axe de la bobine à 45° du méridien magnétique et par suite de la tige.

On pourrait penser qu'un inconvénient résulte de ce que l'action du champ variable s'ajoute à celle du champ

terrestre pendant une moitié de la période, et s'en retranche pendant l'autre moitié; mais, à cause de la faiblesse de ces deux champs, il y a proportionnalité entre l'intensité d'aimantation et le champ, de sorte que les actions sont les mêmes dans les deux cas.

D'ailleurs j'ai fait sur cet appareil de nombreuses expériences de vérification, sur lesquelles j'insisterai un peu ici, parce qu'il peut rendre souvent de grands services, et que sa construction est extrêmement simple.

Essais de l'appareil. — Il fallait étudier d'abord jusqu'à quel point la déviation est proportionnelle au carré de l'amplitude de l'intensité du courant. Pour cela, j'ai mesuré un même courant alternatif par la méthode électrométrique et, d'autre part, au moyen d'une faible dérivation, par l'appareil précédent.

Pour que le partage du courant se fasse proportionnellement aux résistances, c'est-à-dire toujours de la même façon, il faut que les coefficients de self-induction des deux branches dérivées entre lesquelles s'est partagé le courant alternatif soient négligeables. Or, la première comprend la résistance sans self-induction qui sert dans la méthode électrométrique, et dans la deuxième se trouve, avec la bobine de l'appareil de mesure, une résistance très forte, nécessaire pour qu'une faible partie seulement du courant passe dans cette bobine; j'employais une résistance sans self-induction sensible, prise sur une boîte de résistances, et dont l'influence rendait négligeable celle de la self-induction de la bobine.

En effet, les quantités à comparer sont R^2 et $L^2\omega^2$, dont la somme constitue le carré de l'impédance du circuit. Le cadre était formé de trois couches ayant chacune quarante spires, sa longueur était de 4^{cm} , 2 et sa surface moyenne environ 4^{cm^2} ; on avait donc au plus

$$L = 4\pi n_1 n S = 170000.$$

Pour une fréquence égale à 100, le terme $L^2\omega^2$ avait au plus la valeur

$$L^2\omega^2 = \frac{1}{170000.4\pi^2.100},$$

ou environ $1,2.10^{16}$. D'autre part, la résistance étant de n ohms, on a

$$R^2 = n^2.10^{18};$$

n étant un nombre considérable, de l'ordre de un millier, on voit que le terme $L^2\omega^2$ est négligeable devant R^2 .

J'ai fait deux séries d'expériences, pour les valeurs de la fréquence 24 et 46,7. Les Tableaux suivants résument les résultats obtenus, d représentant la déviation de l'appareil, lue à l'aide d'un miroir, et I_m^2 le carré moyen de l'intensité, déduit des indications de l'électromètre.

Première Série.

d	8,2	13,1	21,7	32,2	38,2	
I_m^2	0,0263	0,0383	0,0659	0,0994	0,121	
$\frac{d}{I_m^2}$	312	342	329	324	316	
d	48,7	60	76,3	86,2	91	110,4
I_m^2	0,150	0,191	0,237	0,273	0,291	0,35
$\frac{d}{I_m^2}$	324	315	322	315	313	314

Deuxième Série.

d	8,2	11,8	21,7	24,4	32,8	
I_m^2	0,0348	0,052	0,0964	0,107	0,135	
$\frac{d}{I_m^2}$	236	227	225	228	243	
d	41,5	55,5	63	74,2	87	105,2
I_m^2	0,174	0,232	0,268	0,317	0,362	0,445
$\frac{d}{I_m^2}$	238	238	236	234	240	236

Ainsi, la proportionnalité peut être considérée comme bien vérifiée, les divergences notables ne se produisant que dans le cas de faibles déviations, pour lesquelles une erreur même petite acquiert une certaine importance.

Dans les expériences où la fréquence varie, l'amplitude du courant étant maintenue constante, la déviation de l'appareil doit être proportionnelle au carré de la fréquence. En effet, la relation qui donne l'intensité du courant secondaire i est

$$l \frac{di}{dt} + m \frac{di'}{dt} + ri = 0.$$

Le courant primaire i' est représenté par

$$i' = a \sin \omega t,$$

où a est alors une constante, et l'équation précédente donne

$$i = b \sin(\omega t - \varphi)$$

avec

$$b^2 = \frac{m^2 a^2 \omega^2}{r^2 + l^2 \omega^2}.$$

Or dans toutes les expériences on maintient sur le circuit de l'appareil une résistance sans self-induction sensible, et assez considérable pour que le dénominateur se réduise très sensiblement à r^2 , de sorte que b^2 est proportionnel à ω^2 .

J'ai vérifié cette proportionnalité pour plusieurs intensités, l'accord étant aussi satisfaisant que dans les expériences précédentes.

Les résultats de cette étude montrent que les indications de cet instrument sont susceptibles d'une certaine précision malgré les causes d'erreur qui, par suite de l'hystérésis et de l'aimantation résiduelle par exemple, paraîtraient devoir les affecter.

VI. — ÉCRANS NON MAGNÉTIQUES.

J'ai étudié l'influence de la fréquence pour un certain nombre de cylindres de substances différentes, et réalisant à peu près tous les degrés depuis les écrans les plus con-

ducteurs jusqu'à ceux qui produisent une protection à peine sensible.

L'intensité du courant alternatif n'avait pas ici d'influence, comme je l'ai vérifié incidemment à plusieurs reprises; j'ai donc utilisé l'intensité la plus commode pour les mesures, en la maintenant, bien entendu, constante dans chaque série d'expériences.

La bobine employée avait 20^{cm} de longueur et 5^{cm}, 8 de diamètre intérieur; elle était formée de huit couches de fil ayant une épaisseur totale de 1^{cm}, 7. L'uniformité du champ est presque réalisée dans la partie occupée par la petite bobine secondaire. Calculons en effet le champ dû à la dernière couche de la bobine, celle pour laquelle l'uniformité était le plus loin d'être réalisée. Le diamètre de cette couche était de 9^{cm} environ.

En appliquant les formules connues ⁽¹⁾ au cas d'une couche de fil de 20^{cm} de longueur et 4^{cm}, 5 de rayon, on trouve pour la valeur du champ en un point de la section centrale, en désignant par y la distance à l'axe,

$$X = 4\pi n_1 \left(0,913 + \frac{y^2}{1050} + \dots \right).$$

En un point d'une section située à 3^{cm} de la section centrale, on a :

$$X = 4\pi n_1 \left(0,896 + \frac{y^2}{648} + \dots \right).$$

Les bobines secondaires employées n'avaient jamais plus de 6^{cm} de longueur et 2^{cm} de diamètre. Ces formules montrent donc que l'uniformité était réalisée à plus de $\frac{1}{650}$ près dans chaque section, et que les valeurs extrêmes du champ différaient toujours de beaucoup moins de

$$\frac{0,913 - 0,896}{0,913} = \frac{1}{54}.$$

(1) MASCART et JOUBERT, *Électricité et Magnétisme*, 2^e édition; t. II, p. 110.

Nous allons passer en revue les résultats obtenus avec les différentes substances.

1° *Cuivre*. — Le cuivre est un des métaux les plus conducteurs et produit par suite une protection notable. Il est difficile d'obtenir des masses bien homogènes de cuivre rouge, mais ce résultat a pu être atteint après plusieurs essais au moyen du cuivre pur électrolytique. J'ai employé trois cylindres ayant 22^{cm} de hauteur, 5^{cm},7 de diamètre extérieur, et respectivement 5^{mm},9; 13^{mm},3 et 21^{mm},1 d'épaisseur.

Voici les résultats obtenus, N représentant la fréquence, et δ , δ_1 , δ_2 , δ_3 les déviations obtenues respectivement sans écran, et avec chacun des trois écrans, pour une même valeur de la fréquence et une même intensité efficace du courant primaire.

N.	$\sqrt{\frac{\delta_1}{\delta}}$	$\sqrt{\frac{\delta_2}{\delta}}$	$\sqrt{\frac{\delta_3}{\delta}}$
13,5	0,847	0,665	0,609
25,7	0,728	0,510	0,447
32,5	0,673	0,450	0,384
47,5	0,541	0,325	0,262
61,2	0,453	0,258	0,188
73,2	0,412	0,218	0,154
84,7	0,370	0,191	0,132
85,3	0,364	0,188	0,128
98,7	0,316	0,170	0,104
111,7	0,272	0,132	0,079

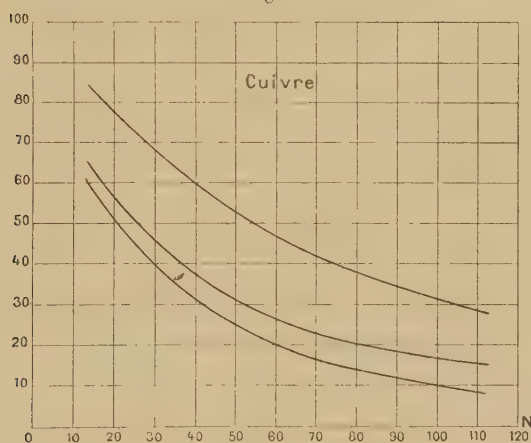
Ces résultats sont réunis dans les courbes de la *fig. 2*, sur la nature desquelles nous reviendrons plus loin.

2° *Laiton*. — Trois cylindres de laiton ont été étudiés; leurs dimensions étaient : hauteur, 22^{cm}; diamètre extérieur, 5^{cm},6; épaisseurs respectives, 2^{mm},75; 7^{mm},72 et 14^{mm},1.

N.	$\sqrt{\frac{\sigma_1}{\delta}}$	$\sqrt{\frac{\sigma_2}{\delta}}$	$\sqrt{\frac{\sigma_3}{\delta}}$
13,7	»	0,993	0,982
25,6	»	0,981	0,968
38,8	0,982	0,967	0,945
52,4	0,978	0,934	0,894
61,2	0,967	0,906	0,852
72,5	0,960	0,882	0,826
82,1	0,945	0,852	0,787
95,8	0,933	0,804	0,726
106	0,922	0,769	0,663

3° *Alliage cuivre-zinc contenant seulement quelques centièmes de zinc.* — Deux cylindres ayant pour dimen-

Fig. 2.



sions : hauteur, 22^{cm}; diamètre extérieur, 5^{cm}, 6; épaisseurs, 8^{mm} et 14^{mm}; ces cylindres étaient beaucoup moins bons que tous les autres; ils présentaient de nombreuses soufflures.

N.	$\sqrt{\frac{\delta_1}{\delta}}$	$\sqrt{\frac{\delta_2}{\delta}}$
32,7	0,844	0,711
50,4	0,735	0,560
65,2	0,631	0,475
75,3	0,566	0,418
85,4	0,514	0,384
100,7	0,470	0,340
115,8	0,432	0,315

4° *Plomb*. — Deux cylindres : hauteur, 22^{cm} ; diamètre extérieur, 5^{cm}, 6 ; épaisseurs, 7^{mm}, 3 et 13^{mm}, 9.

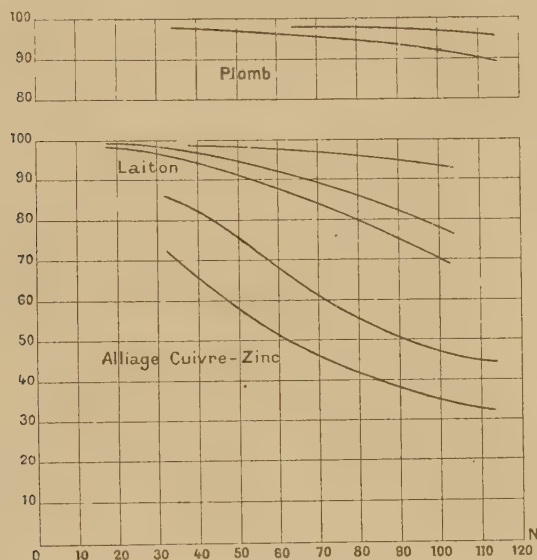
N.	$\sqrt{\frac{\delta_1}{\delta}}$	$\sqrt{\frac{\delta_2}{\delta}}$
32,7	»	0,980
55,2	»	0,970
63,5	0,984	0,966
75,3	0,977	0,953
85,4	0,968	0,934
100,7	0,963	0,916
115,8	0,956	0,892

5° *Mercure*. — Une couche de mercure de 1^{cm}, 1 d'épaisseur formait un écran presque nul pour les faibles fréquences. Pour N = 114, 8, on a obtenu $\sqrt{\frac{\delta_1}{\delta}} = 0,99$.

Les *fig.* 2 et 3, qui résument les résultats précédents, montrent que les courbes relatives aux écrans de cuivre tournent leur convexité vers l'axe des *x*, celles relatives aux écrans de laiton et de plomb tournant au contraire leur concavité dans cette direction ; cela provient de ce que chacune d'elles n'embrasse qu'une certaine région de la courbe complète, et les deux autres courbes, dont l'une présente nettement un point d'inflexion, montrent comment s'opère la transition ; la comparaison de ces résultats

avec ceux de la théorie nous permettra de préciser davantage.

Fig. 3.



VII. — COMPARAISON AVEC LA THÉORIE.

Je rappellerai d'abord brièvement les principes de la théorie.

Dans un conducteur homogène et isotrope, dont on suppose la perméabilité magnétique μ invariable, le champ magnétique H satisfait à l'équation

$$(1) \quad \Delta H = 4\pi\mu c \frac{\partial H}{\partial t},$$

c représentant la conductivité⁽¹⁾. Si l'on se borne au cas où H est une fonction périodique du temps, on peut simpli-

(1) La démonstration de cette formule est donnée dans une Note placée à la fin de ce travail.

fier beaucoup l'étude d'une équation de cette forme (1).

Une fonction circulaire (qui sera si l'on veut un des termes du développement de la fonction périodique) peut être représentée par l'écriture

$$H = \varphi e^{i\omega t}.$$

En posant $m = 4\pi\mu c\omega$, l'équation (1) devient

$$(2) \quad \Delta\varphi = mi\varphi.$$

Dans le cas d'un cylindre de révolution placé dans un champ primitivement uniforme, parallèle aux génératrices, la fonction φ ne dépend que de la distance ρ à l'axe, et (2) se réduit à

$$(3) \quad \frac{d^2\varphi}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{d\varphi}{d\rho} = mi\varphi.$$

L'intégrale générale de cette équation est, en posant $x^2 = -im\rho^2$,

$$(4) \quad \varphi = A J_0(x) + B K_0(x).$$

Dans cette expression, J_0 représente la fonction de Bessel d'ordre 0, c'est-à-dire la série

$$J_0(x) = 1 - \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^4}{2^2 \cdot 4^2} - \frac{x^6}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} \dots;$$

K_0 est donné par l'expression

$$K_0(x) = (c + \log 2 - \log x) J_0(x) + 2 \left[J_2(x) - \frac{1}{2} J_4(x) + \frac{1}{3} J_6(x) \dots \right],$$

où c est une constante, appelée *constante de Gauss*, et égale

(1) MASCART et JOUBERT, *Leçons sur l'Électricité et le Magnétisme*, 2^e édition, t. I, p. 713. — J.-J. THOMSON, *Recent Researches in Elect. and Magn.*, p. 263.

à 0,577, et $J_2, J_4, \dots$, les fonctions de Bessel, dont la définition générale est

$$J_n(x) = \frac{x^n}{1 \cdot 2 \dots 2n} \left[1 - \frac{x^2}{2(2n+2)} + \frac{x^4}{2 \cdot 4 \cdot (2n+2)(2n+4)} \dots \right].$$

Dans le cas particulier d'un cylindre plein, l'expression (4) se simplifie; en effet, la fonction K_0 est infinie pour $x = 0$; il en résulte, la valeur du champ ne pouvant être infinie en un point situé sur l'axe, que le coefficient B est alors nul, de sorte qu'il reste

$$\varphi = A \cdot J_0(x).$$

Enfin, lorsque la fréquence est assez élevée pour que les actions électromagnétiques soient localisées au voisinage de la surface extérieure, on peut remplacer dans l'équation (3) ρ par la valeur du rayon extérieur; l'équation devient alors une équation à coefficients constants, et la solution est de la forme

$$\varphi = Ce^{-\alpha x} \cos(\omega t - \beta x),$$

où x représente la distance à la surface, de sorte que la variation de l'amplitude du champ est représentée par une exponentielle.

Ceci posé, pour chercher la protection exercée par un cylindre creux, on calculera le rapport entre les valeurs de l'amplitude du champ magnétique à la surface intérieure et à la surface extérieure, et l'on prendra le rapport de ces deux valeurs.

Si l'on emploie l'expression complète (4), il faudra déterminer la constante $a = \frac{B}{A}$ (le coefficient A mis en facteur disparaît lorsqu'on prend le rapport des deux valeurs du champ); cette quantité a varie avec la fréquence N, puisque N entre dans la relation de condition, quelle qu'elle soit, au moyen de laquelle on détermine a .

Une valeur de a ayant été déterminée pour une fré-

quence donnée, on peut se proposer de chercher : 1° si la même valeur convient quand N varie, c'est-à-dire si une même fonction de N et du rayon peut représenter le phénomène entre certaines limites; 2° si, pour cette fréquence seulement, la même formule permet de calculer la protection de plusieurs cylindres creux d'une même substance.

Le calcul, qui paraît très laborieux au premier abord, est simplifié par ce fait que, pour les valeurs assez faibles de la variable, les termes des fonctions J deviennent très rapidement négligeables; or, dans mes expériences, la valeur $\rho\sqrt{m}$ de la variable n'atteint pas 7 (dans la suite je poserai $m\rho^2 = \gamma^2$, de sorte que $x^2 = -i\gamma^2$).

Lord Kelvin a donné une Table des valeurs de J_0 ⁽¹⁾; parmi les autres fonctions de Bessel, la seule à considérer ici est J_2 , les séries d'ordre plus élevé étant négligeables quand γ est inférieur à 7; j'en ai calculé les valeurs jusqu'à $\gamma = 7$; je reproduis ici les valeurs qui sont utiles pour les calculs relatifs à mes expériences :

γ_0	$J_0 = a_0 + ib_0$		$J_2 = a_2 + ib_2$	
	a_0	b_0	a_2	b_2
0.....	1	0	0	0
0,5....	+0,999	+ 0,0625	+0,0001	-0,01
1.....	+0,9844	+ 0,2496	+0,003	-0,04
1,5....	+0,9221	+ 0,5576	+0,017	-0,09
2.....	+0,7517	+ 0,9723	+0,055	-0,16
2,5....	+0,3999	+ 1,4571	+0,13	-0,24
3.....	-0,2214	+ 1,9376	+0,27	-0,35
3,5....	-1,1936	+ 2,2833	+0,48	-0,51
4.....	-2,5634	+ 2,2927	+0,74	-0,26
4,5....	-5,2991	+ 1,6859	+1,13	+0,15
5.....	-6,2301	+ 0,1160	+1,49	+0,47
5,5....	-7,9735	- 2,7902	+1,77	+1,26
6.....	-8,8583	- 7,3347	+1,77	+2,36
6,5....	-7,9	-13,59	+1,03	+4,05
7.....	-4,5	-28,1	-0,60	+5,86

(1) Sir W. THOMSON, *Math. and Phys. papers*, t. III, p. 491.
MASCART et JOUBERT, *loc. cit.*, p. 718.

Considérons, par exemple, le plus épais des écrans de cuivre et déterminons a par la condition qu'il y ait accord entre le résultat du calcul et celui de l'expérience pour $N = 70$. Les deux valeurs du rayon sont ici $\rho_1 = 2,85$ et $\rho_2 = 0,74$, et les valeurs correspondantes de y : $y_1 = 5,296$ et $y_2 = 1,372$. On devra avoir, le nombre trouvé expérimentalement étant 0,166,

$$\frac{\varphi_{y_2}}{\varphi_{y_1}} = 0,166.$$

Cette équation est satisfaite pour une valeur de a très voisine de 0,1. Nous allons examiner les deux points indiqués plus haut.

1. En faisant $a = 0,1$ dans l'expression de $\frac{\varphi}{A}$, on peut calculer, pour différentes fréquences, les valeurs de $\frac{\varphi}{A}$ correspondant aux rayons maximum et minimum de l'écran considéré; le rapport de ces valeurs sera le rapport $\frac{H'_m}{H_m}$ des amplitudes des champs intérieur et extérieur; la comparaison des nombres ainsi calculés avec ceux trouvés par l'expérience indiquera entre quelles limites la formule employée convient.

J'ai calculé également les valeurs de ce rapport en prenant comme expression de φ la fonction J_0 seule, puis en admettant la loi exponentielle en fonction de la distance à la surface (la fréquence N entre alors dans l'exposant par sa racine carrée); nous pourrions voir ainsi si ces procédés de calcul, beaucoup plus rapides, s'accordent avec l'expérience.

J'ai pris comme valeur de la conductivité du cuivre

$$c = 62,5 \cdot 10^{-5} = \frac{1}{1600}.$$

Dans le premier des deux Tableaux suivants sont réunis

les éléments du calcul effectué au moyen de la formule complète; dans le second les nombres expérimentaux sont comparés aux nombres obtenus par le calcul effectué 1° au moyen de la formule complète; 2° au moyen de la solution $\varphi = J_0$; 3° au moyen d'une simple exponentielle.

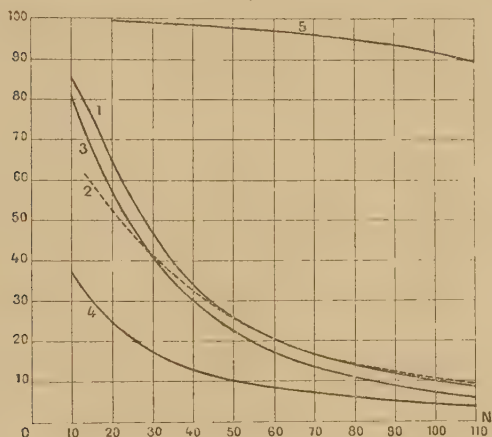
N.	γ_1 .	γ_2 .	φ_{γ_1} .	φ_{γ_2} .	Rapport $\frac{\varphi_{\gamma_2}}{\varphi_{\gamma_1}}$.
10...	2,001	6,518	1,29	1,12	0,864
20...	2,830	0,733	1,79	1,12	0,628
30...	3,467	0,898	2,5	1,13	0,453
40...	4,003	1,037	3,4	1,14	0,335
50...	4,475	1,162	4,5	1,16	0,257
60...	4,903	1,270	5,8	1,19	0,205
70...	5,296	1,372	7,15	1,19	0,166
80...	5,661	1,467	8,85	1,20	0,136
90...	6,005	1,556	10,96	1,20	0,110
100...	6,330	1,640	13,1	1,21	0,092
110...	6,640	1,720	16,1	1,23	0,076

N.	Nombre expérimental.	Formule complète.	$\varphi = J_0$.	Exponentielle.
10.....	»	0,874	0,815	0,351
20.....	0,513	0,628	0,560	0,227
30.....	0,402	0,453	0,396	0,163
40.....	0,322	0,335	0,297	0,123
50.....	0,250	0,257	0,228	0,096
60.....	0,194	0,205	0,179	0,076
70.....	0,166	0,166	0,142	0,062
80.....	0,136	0,136	0,115	0,052
90.....	0,114	0,110	0,096	0,044
100.....	0,097	0,092	0,069	0,036
110.....	0,081	0,076	0,055	0,032

Ces résultats sont représentés par les courbes de la *fig. 4*. On en déduit que : 1° les nombres obtenus au moyen de la formule exponentielle sont très différents des nombres expérimentaux; ce n'est que pour des fréquences beaucoup plus considérables qu'on pourrait employer cette formule; 2° l'emploi de la fonction J_0 seule conduit

à des valeurs beaucoup moins éloignées que les précédentes de celles données par l'expérience; 3° avec la for-

Fig. 4.



mule complète, où l'on a fait $\alpha = 0,1$, l'accord est sensiblement réalisé entre les fréquences 40 et 120⁽¹⁾.

Il faut bien remarquer que, dans le deuxième cas, on n'a fait intervenir aucune constante, tandis que l'emploi de la formule complète a nécessité le calcul d'une constante choisie justement de façon que l'accord soit complètement réalisé dans une partie moyenne. Si donc on veut seulement chercher d'une manière approximative le rôle d'un écran, on pourra réduire l'expression du champ à la fonction J_0 ; si l'on veut plus de précision, on ne pourra l'obtenir, entre certaines limites, qu'en employant la formule complète et en faisant intervenir, d'une ma-

(¹) Les différences notables qui existent pour les faibles fréquences entre les nombres expérimentaux et les nombres calculés par la formule complète montrent simplement que le coefficient α , qui varie forcément avec la fréquence, comme je l'ai fait remarquer plus haut, varie surtout lorsque la fréquence tend vers 0; le calcul effectué avec la valeur de α calculée pour $N = 70$ devient alors tout à fait incorrect.

nière quelconque, les conditions aux limites qui fixeront les coefficients des deux parties de la formule.

On peut se demander si la valeur choisie pour la conductivité est exactement celle des cylindres, et si, en prenant une autre valeur, on n'aurait pas obtenu des résultats un peu différents; la valeur que j'ai adoptée est celle de la conductivité du cuivre pur, qui semble convenir aux masses bien homogènes de cuivre électrolytique constituant les écrans; si l'on voulait, par exemple, obtenir une concordance complète, pour $N = 70$, entre l'expérience et le résultat du calcul effectué avec la fonction J_0 seule, il faudrait admettre une valeur de la conductivité un peu plus petite que $57 \cdot 10^{-5}$, c'est-à-dire bien inférieure à ce qu'on peut supposer ici. L'allure de la courbe théorique n'est d'ailleurs pas modifiée d'une manière sensible par une variation de cet ordre dans la conductivité.

2. Cherchons avec quelle précision la même formule représente les résultats obtenus avec les deux autres écrans de cuivre, dont les rayons intérieurs sont $1^{\text{cm}}, 52$ et $2^{\text{cm}}, 26$, les rayons extérieurs étant les mêmes que celui du premier. Le Tableau suivant permet de comparer avec les résultats expérimentaux, pour plusieurs valeurs de N , les résultats obtenus pour les trois écrans.

N.	Premier écran.		Deuxième écran.		Troisième écran.	
	Observé.	Calculé.	Observé.	Calculé.	Observé.	Calculé.
50...	0,250	0,257	0,315	0,328	0,530	0,575
70...	0,166	0,166	0,228	0,246	0,420	0,520
100...	0,097	0,092	0,165	0,215	0,315	0,464

L'accord est à peu près satisfaisant pour $N = 50$, mais les divergences deviennent très importantes pour les fréquences élevées; il semble donc que la constante déterminée pour l'un des écrans ne puisse pas convenir pour les autres.

Pour les écrans de faible conductivité on obtient des

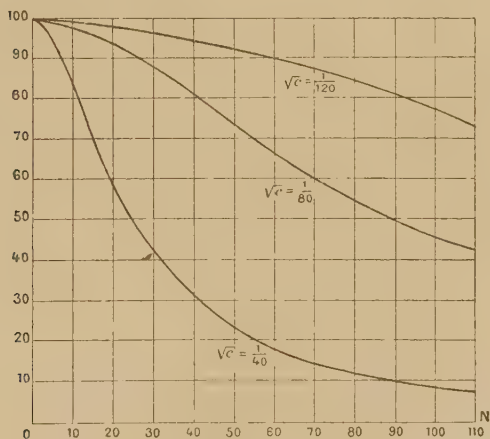
résultats sensiblement conformes aux résultats expérimentaux en employant seulement la fonction J_0 ; voici, par exemple, les nombres obtenus pour le plus épais des écrans de plomb, en prenant pour valeur de la conductivité $3,85.10^{-5}$:

N.					
20.	40.	60.	80.	100.	120.
0,994	0,987	0,967	0,941	0,916	0,889

La courbe (*fig. 4*) comme la courbe expérimentale correspondante, avec laquelle elle s'accorde d'ailleurs d'une façon satisfaisante, tourne sa concavité vers l'axe des x , tandis que les courbes relatives aux écrans de cuivre tournent leur convexité dans la même direction.

D'une façon générale, cherchons à nous rendre compte

Fig. 5.

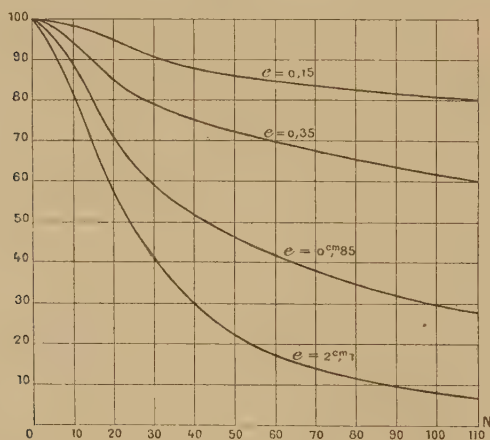


de la forme des courbes représentant la protection en fonction de la fréquence; nous supposerons pour cela le champ représenté par la fonction J_0 ; ces courbes présentent un point d'inflexion dont la position varie avec la nature de l'écran. Ainsi, dans la *fig. 5* on a représenté les courbes

calculées pour des écrans identiques au gros cylindre de cuivre, mais dont les conductivités auraient respectivement pour valeurs $\frac{1}{40}$, $\frac{1}{80}$ et $\frac{1}{120}$. On voit que, dans la région étudiée expérimentalement ici, on peut trouver, suivant le cas, une courbe tournant sa concavité ou sa convexité vers l'axe des x , ou une courbe ayant un point d'inflexion.

Si, au lieu de considérer des écrans identiques de conductivité différente on construit les courbes relatives à des écrans de même conductivité et de même rayon extérieur, mais d'épaisseur variable, on obtient un résultat un peu différent; dans la *fig. 6* on a représenté les

Fig. 6.



courbes correspondant à des écrans de cuivre ayant pour rayon extérieur $2^{\text{cm}},85$ (celui des écrans employés ici) et pour rayons intérieurs respectivement $0^{\text{cm}},74$; 2^{cm} ; $2^{\text{cm}},5$; $2^{\text{cm}},7$ ⁽¹⁾. Le point d'inflexion reste, dans

(¹) Pour toutes ces courbes, les tangentes au départ sont très peu inclinées sur l'horizontale.

tous les cas, assez voisin de l'axe des ordonnées. Nous avons trouvé en effet cette forme dans le cas des écrans de cuivre; nous la retrouverons pour les écrans de fer, dans lesquels la conductivité c est faible, mais est multipliée par μ dans l'expression $2\pi\sqrt{\mu c N}\rho$ de la variable.

En somme, on voit que l'ensemble des résultats théoriques est bien vérifié par l'expérience; pour résoudre complètement par le calcul le problème de la distribution du champ magnétique dans l'un des cylindres, il faudrait déterminer pour chaque fréquence les coefficients de la formule complète, au moyen des conditions aux limites; nous avons vu que la formule obtenue ainsi donne encore de bons résultats pour un certain intervalle de fréquences. On obtient enfin des renseignements assez précis en employant la méthode de calcul simplifiée qui consiste à prendre la fonction J_0 comme expression de l'amplitude du champ.

VIII. — ÉCRANS DE FER.

Dans le cas des écrans de fer, les expériences sont plus complexes, puisqu'il faut se préoccuper non seulement du rôle de la fréquence, mais encore de celui de l'intensité du champ employé.

1° *Expériences avec le tore.*

L'écran étant constitué par un tore creux, on ne peut opérer, comme dans les expériences précédentes, en se servant toujours de la même bobine magnétisante, successivement avec et sans écran. J'ai donc divisé les mesures en deux parties, en employant toujours la même bobine secondaire; dans la première partie, cette bobine était placée à l'intérieur du tore creux, recouvert lui-même d'une bobine magnétisante; dans la deuxième, elle était contenue à l'intérieur d'une nouvelle bobine aussi iden-

tique que possible à la précédente, mais sans interposition de fer.

Le tore en fer a été fait en deux morceaux égaux; sa section était un cercle de $2^{\text{cm}},87$ de diamètre, et sa circonférence moyenne avait environ 14^{cm} de rayon. Il était formé d'une lame de tôle de 1^{mm} d'épaisseur, travaillée à chaud et brasée suivant une génératrice. La bobine secondaire était enroulée sur un noyau de caoutchouc, de sorte qu'on pouvait la glisser dans les deux morceaux du tore; ceux-ci rapprochés au contact, furent soudés; deux petits trous avaient été ménagés pour laisser passer les fils de la bobine secondaire, qui occupait toute la longueur de la cavité intérieure. Sur le tore était enroulée la bobine magnétisante.

Avec l'appareil ainsi disposé, trois séries d'expériences furent faites; dans les deux premières, on opéra à fréquence constante ($N = 38$ et $N = 70$) et à intensité variable; dans la troisième, à intensité constante et à fréquence variable.

Ces expériences terminées, l'anneau fut défait, et la même bobine secondaire recouverte de papier paraffiné jusqu'à ce qu'on obtint un nouvel anneau ayant aussi exactement que possible les dimensions du tore en fer employé précédemment; on le recouvrit d'une bobine semblable à celle du premier appareil; les trois séries d'expériences furent alors reprises, l'intensité du courant primaire et sa fréquence étant les mêmes que dans les premières; il était facile d'amener exactement l'intensité à la valeur convenable; pour la fréquence, lorsqu'il y avait un petit écart, on corrigeait le résultat en s'appuyant sur ce que la déviation de l'appareil de mesure est proportionnelle, pour une même intensité, au carré de la fréquence.

Les bobines magnétisantes étaient formées de quatre couches de fil fin (1^{mm} de diamètre) et d'une couche de

gros fil (2^{mm}). Malgré les précautions prises, les nombres de spires des couches correspondantes n'étaient pas tout à fait les mêmes :

Première bobine.

555, 547, 541, 514, 306;

Deuxième bobine.

541, 534, 533, 515, 304;

soit, pour la première,

$$4\pi n_1 = 4\pi \frac{2463}{89,7} = 344,95$$

et pour la deuxième

$$4\pi n'_1 = 4\pi \frac{2427}{89,7} = 340,05.$$

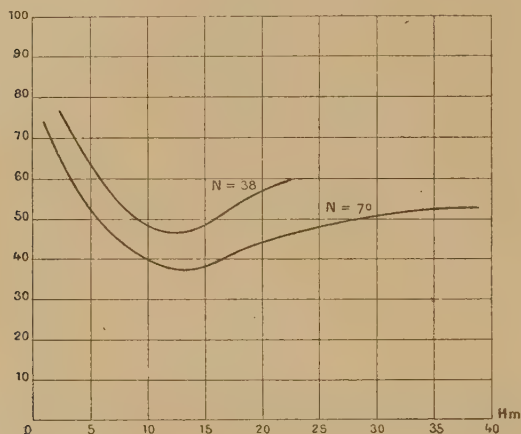
Dans les expériences de comparaison, on ramenait le courant à une valeur telle que celle de $4\pi n_1 i$ fût la même que dans le premier cas :

1° *Influence de l'intensité du champ.* — Elle est résumée dans les deux Tableaux suivants, où les quantités H_m sont les valeurs maximum du champ périodique, en unités C.G.S., calculées par la formule $H_m = 4\pi n_1 i_m$ au moyen des indications de l'électromètre, en admettant que le courant est exactement sinusoïdal :

N = 70.		N = 38.	
H_m .	$\sqrt{\frac{\delta'}{\delta}}$.	H_m .	$\sqrt{\frac{\delta'}{\delta}}$.
0,99	0,740	2,16	0,781
1,36	0,722	4,26	0,654
1,89	0,683	6,91	0,581
3,24	0,592	10,9	0,522
5,04	0,500	17,98	0,534
7,93	0,425	22,5	0,591
14,7	0,370		
21,27	0,455		
39,38	0,517		

Les courbes construites au moyen de ces résultats (fig. 7) montrent que la protection passe par un maxi-

Fig. 7.



mum, qui correspond à peu près à la même abscisse dans les deux cas. D'après ce que nous avons vu plus haut, cette valeur de H_m doit se trouver au delà de celle pour laquelle la perméabilité est maximum. Pour le vérifier, j'ai déterminé la courbe de perméabilité par la méthode balistique, au moyen d'une couche de fil très fin qui avait été enroulée directement sur le tore; en désignant par H le champ, par S la surface de la section intérieure du tore et s la surface de la section du fer, le flux d'induction coupé par les n spires du fil est

$$\varphi = n(S + \mu s)H.$$

Le galvanomètre balistique était étalonné de la façon suivante : le circuit reliant la bobine de mesure au galvanomètre comprenait une deuxième bobine, cylindrique, placée dans la région centrale d'une bobine longue, et concentriquement à celle-ci; un courant d'intensité con-

nue produisait dans cette région un champ très sensiblement uniforme, la longueur de la bobine étant de 1^m, 15 et son diamètre de 4^{cm}, 9; des constantes des deux bobines et de l'intensité du courant on pouvait déduire la valeur du flux à travers la bobine auxiliaire, et étalonner ainsi le galvanomètre. Celui-ci était un galvanomètre Thomson, dont la durée d'oscillation complète avait été amenée à dix secondes, et qui se trouvait dans une pièce éloignée de celle où étaient les bobines et le rhéostat permettant de faire varier le courant magnétisant.

Avant les mesures, le tore avait été désaimanté par un courant alternatif d'intensité progressivement décroissante.

H	1,297	1,48	1,634	2,595	3,614	
μ	521	618	735	888	1066	
H	4,336	5,56	6,49	8,21	10,13	13,02
μ	1145	1372	1157	1033	908	774

On voit que le maximum de la perméabilité est atteint avant le minimum des courbes précédentes, comme on devait s'y attendre (1).

2° *Influence de la fréquence.* — Dans ces expériences l'intensité du courant alternatif était maintenue constante, la valeur correspondante de H_m étant 4,87. Voici les nombres obtenus

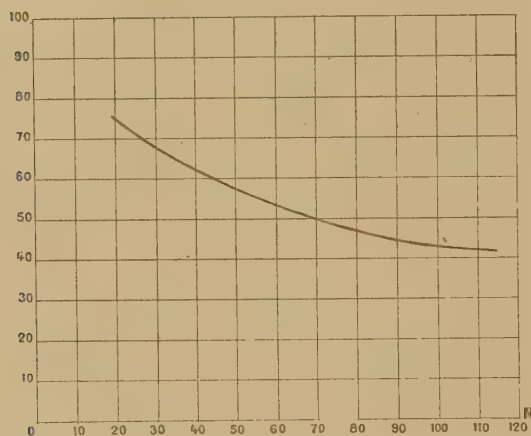
N....	19	30,3	39,1	50,7	69,9	77,6	88,2	101,5	114,7
$\sqrt{\frac{\delta'}{\delta}}$	0,752	0,673	0,634	0,571	0,504	0,465	0,437	0,414	0,408

L'allure de cette courbe (*fig. 8*) n'est pas la même que

(1) Dans ces mesures et dans quelques autres qui étaient faites plus commodément par deux personnes, M. Pierre Lalance, garçon du laboratoire, m'a aidé avec beaucoup d'habileté, et je saisis cette occasion de l'en remercier.

celle des courbes obtenues dans le cas des écrans de cuivre; la variation, d'abord rapide, se ralentit beaucoup plus que dans ces dernières; en effet, nous voyons que pour $N = 30$ la courbe relative au plus mince des écrans de cuivre et la

Fig. 8.



courbe relative au tore ont des ordonnées à peu près égales (*fig. 2*); mais la première continue à baisser rapidement, atteignant 270 environ pour $N = 110$, tandis que la deuxième ne descend, pour la même valeur de N , qu'à 420. Nous verrons plus loin comment on peut expliquer cette différence d'allure.

2° Écrans cylindriques.

La bobine employée avait 1^m, 15 de longueur; elle comprenait cinq couches de fil, enroulées sur un tube de verre choisi aussi uniforme que possible, et dont les deux premières, la troisième et les deux dernières formaient des circuits indépendants, qu'on pouvait utiliser ensemble ou séparément; le fil de la troisième couche avait environ 2^{mm} de diamètre, et celui des quatre autres, 1^{mm}; le dia-

mètre extérieur de la bobine était de 6^{cm} , les cinq couches de fil occupant une épaisseur totale d'environ $6^{\text{mm}}, 5$.

Les deux écrans étudiés étaient des cylindres en tôle de fer, brasés suivant une génératrice, de $1^{\text{m}}, 20$ de longueur, $3^{\text{cm}}, 6$ de diamètre extérieur, et respectivement 1^{mm} et $1^{\text{mm}}, 75$ d'épaisseur.

L'influence de l'aimantation induite était ici considérable, comme le montreront les expériences faites pour déterminer la perméabilité d'un des cylindres, en sorte que l'affaiblissement du champ produit par la bobine était dû à deux causes, le champ démagnétisant et l'action des courants induits; il faut remarquer que l'une de ces causes influe sur l'autre; en effet, le champ étant diminué par l'aimantation induite, le flux et par suite les courants d'induction sont moins intenses; il est difficile de prévoir d'une manière précise l'action du champ démagnétisant, à cause du retard d'aimantation; il était donc intéressant de chercher si les résultats obtenus alors seraient comparables à ceux des expériences précédentes : nous allons voir que la nature des variations observées est sensiblement la même, dans les limites de mes expériences.

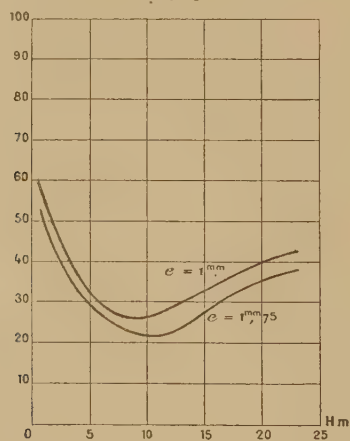
1^o *Influence de l'intensité.* — Les expériences sont ici beaucoup plus simples que dans le cas précédent; il suffit de lire les déviations obtenues successivement sans écran et avec chacun des deux écrans, en ramenant dans chaque série la fréquence et l'intensité aux mêmes valeurs, celle de la fréquence restant constante pendant les expériences. Lorsque dans une expérience la fréquence s'écartait un peu de la valeur choisie, on corrigeait la déviation observée en la supposant proportionnelle au carré de la fréquence; ce mode de correction n'est pas rigoureusement exact lorsqu'il s'applique à une expérience où figure l'un des écrans, parce que la variation de la fréquence influe alors sur l'intensité des courants induits; mais l'erreur commise ainsi était tout à fait négligeable.

Voici les résultats obtenus pour $N = 76$ (H_m représentant comme plus haut l'amplitude du champ, calculée par la formule $4\pi n_1 i_m$).

H_m	$\sqrt{\frac{\delta_1}{\delta}}$	$\sqrt{\frac{\delta_2}{\delta}}$
1,05	0,594	0,546
1,64	0,530	0,459
2,16	0,447	0,401
3,81	0,385	0,350
6,1	0,287	0,260
7,37	0,275	0,247
9,74	0,269	0,229
12,37	0,281	0,228
14,93	0,304	0,272
16,57	0,388	0,335
23,05	0,421	0,387

Nous retrouvons des résultats analogues à ceux obtenus avec l'écran annulaire : la protection augmente rapide-

Fig. 9.



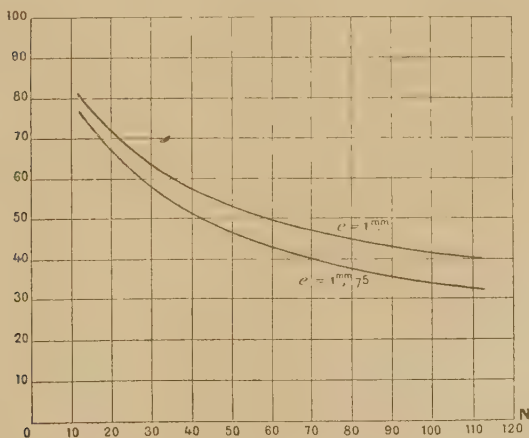
ment, atteint un maximum, puis décroît plus lentement (fig. 9). Son maximum suit celui de la courbe de perméabilité, dont nous étudierons plus loin la forme.

2° *Influence de la fréquence.* — Les expériences se faisaient par séries dans chacune desquelles la fréquence était maintenue constante, l'intensité étant la même dans toutes les expériences (elle correspondait à $H_m = 2,11$). Les corrections s'effectuaient comme dans le cas précédent.

N.	$\sqrt{\frac{\delta_1}{\delta}}$	$\sqrt{\frac{\delta_2}{\delta}}$
11,6	0,811	0,759
19,1	0,731	0,676
28,7	0,655	0,573
47,5	0,540	0,485
53,7	0,527	0,473
70,5	0,477	0,424
77,1	0,454	0,397
87,1	0,429	0,364
102,5	0,413	0,332
113,1	0,398	0,312

Le caractère que nous avons rencontré dans la courbe correspondante obtenue avec l'écran annulaire, c'est-à-dire

Fig. 10.



une variation rapide d'abord, puis se ralentissant, se retrouve ici, encore plus accentué (*fig. 10*); on peut l'expli-

quer ainsi : la valeur 2,11 de H_m est inférieure à la valeur du champ qui correspond au maximum de la perméabilité; à mesure que la fréquence augmente, la diminution de l'amplitude du champ en un point du cylindre de fer s'accroissant, la perméabilité moyenne diminue; par suite, d'une part l'action du champ démagnétisant décroît, et, d'autre part, la vitesse de la variation de l'amplitude du champ en fonction de la distance à la surface, vitesse qui dépend de la valeur de la perméabilité, décroît également. Ce dernier effet se manifeste aussi dans le cas du tore, comme nous l'avons vu.

*3° Influence de la région de la courbe de perméabilité
où se font les expériences.*

J'ai employé, pour montrer cette influence, la disposition indiquée plus haut : dans une seule des couches de la bobine magnétisante on fait passer un faible courant alternatif, de fréquence et d'intensité constantes. On détermine comme dans les expériences précédentes, la diminution du champ intérieur causée par l'introduction d'un des écrans cylindriques de fer (c'est le plus mince des deux qui a été utilisé); on envoie alors dans les autres couches de la bobine un courant continu d'intensité variable, en ramenant toujours le courant alternatif à la valeur initiale; le champ constant ainsi créé se superpose au champ alternatif, de sorte que la valeur moyenne autour de laquelle oscille le champ peut correspondre aux différentes régions de la courbe de perméabilité; l'influence de la variation de celle-ci s'exerce à la fois sur le champ démagnétisant et sur la répartition et l'intensité des courants induits.

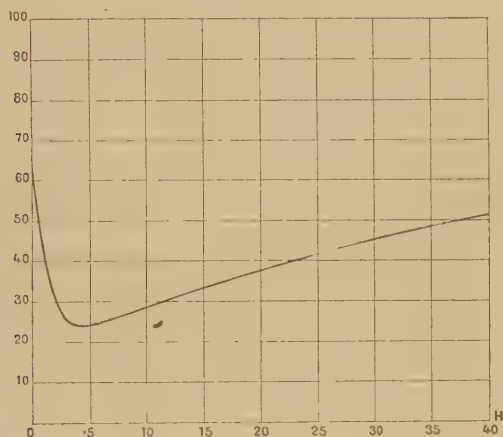
Dans les nombres suivants, H représente la valeur du champ constant, calculée par la formule $H = 4\pi n_1 i$ au moyen de l'intensité du courant envoyé dans la bobine;

en réalité la valeur en était diminuée par le champ démagnétisant; la fréquence était $N = 68$.

H	0	1,21	1,73	2,3	3,81	8,4	13
$\sqrt{\frac{\delta'}{\delta}}$	0,611	0,431	0,359	0,281	0,250	0,272	0,330
H	24	35	43,2	57,5	72,6	108,1	129,7
$\sqrt{\frac{\delta'}{\delta}}$	0,400	0,485	0,550	0,625	0,664	0,764	0,785

Les variations de la protection sont bien celles qu'on pouvait attendre : elle augmente rapidement, atteint un maximum après lequel elle décroît de plus en plus lentement (*fig. 11*) ; le fer aimanté à saturation tend à jouer, comme

Fig. 11.



écran, le rôle d'un corps non magnétique; d'une part, le champ démagnétisant disparaît et, d'autre part, la perméabilité tendant vers l'unité, la conductibilité influence seule sur l'intensité et la distribution des courants induits.

Pour comparer ces variations avec celles de la perméabilité, j'ai déterminé celle-ci par la méthode balistique;

on ne pouvait opérer ici comme dans le cas du tore, c'est-à-dire en calculant le champ au moyen de l'intensité du courant, puisque l'aimantation induite modifie le champ; on comparait donc les flux coupés par deux bobines de fil fin, l'une enroulée directement sur le cylindre de fer, et l'autre placée concentriquement à l'intérieur du cylindre; le champ démagnétisant a très sensiblement la même valeur dans tout l'espace compris à l'intérieur des deux bobines de mesure, de sorte que, en désignant par S la section intérieure du cylindre, par s la section du fer, n le nombre de tours de la bobine extérieure et σ la surface totale de la bobine intérieure, les flux coupés par chacune d'elles étaient

$$\varphi = n(S + \mu s)H',$$

$$\varphi' = \sigma H',$$

H' représentant la valeur du champ réel, c'est-à-dire du champ primitif diminué de l'action démagnétisante de l'aimantation induite.

Les deux bobines étaient faites de la même longueur du même fil, et j'ai vérifié que leurs résistances étaient égales; on les plaçait successivement dans le circuit du galvanomètre, et, dans chaque cas, après avoir désaimanté le cylindre par un courant alternatif, on réalisait les variations du champ; à chaque variation du champ l'aiguille du galvanomètre subit une impulsion produisant une déviation δ proportionnelle à l'augmentation du flux d'induction, de sorte que, à un moment quelconque, le flux est proportionnel à la somme des déviations antérieures; on a ainsi

$$\frac{\varphi}{\varphi'} = \frac{\Sigma \delta}{\Sigma \delta'} \quad \text{ou} \quad \frac{n(S + \mu s)}{\sigma} = \frac{\Sigma \delta}{\Sigma \delta'}.$$

C'est de cette relation qu'ont été déduites les valeurs suivantes :

H'	1,59	1,71	2,48	2,84	3,97	5,22	6,93	10,1	13,56	17,2
μ	1132	1282	1620	1550	1363	1205	1067	948	781	695

les valeurs de H' indiquées ici sont celles déduites de la formule

$$\Sigma \mathcal{G}' = \alpha \pi H',$$

la constante α ayant été déterminée par une expérience faite en enlevant l'écran, c'est-à-dire dans un champ bien déterminé par l'intensité du courant envoyé dans la grande bobine; en comparant ces valeurs de H' avec celles qui étaient déduites de la formule $H = 4\pi n_1 i$, on pouvait se rendre compte de l'importance du champ démagnétisant; pour la valeur maximum de la perméabilité, la valeur de H' était seulement les 0,65 de celle de $4\pi n_1 i$; l'influence moyenne du champ démagnétisant, qui intervenait seule dans les expériences faites avec un champ périodique, était évidemment beaucoup moindre ⁽¹⁾.

On voit que les variations de la perméabilité s'accordent bien avec les résultats précédents; le maximum a lieu pour environ $H' = 2,6$, c'est-à-dire pour

$$4\pi n_1 i = \frac{2,6}{0,65} = 4,$$

valeur qui est à peu près celle pour laquelle la courbe précédente présente un minimum. Elles s'accordent aussi avec les résultats obtenus dans l'étude de la variation de la protection avec l'amplitude du champ : dans ce dernier cas le maximum de la protection correspond à environ $H_m = 9,5$, c'est-à-dire, comme nous l'avions prévu, à une valeur notablement plus élevée que celle pour laquelle la perméabilité est maximum.

Ainsi les résultats obtenus dans l'étude des écrans de fer

(1) Cette méthode de mesure est analogue à celle de la double bobine, employée par M. Weiss (*Journ. de Phys.*, 3^e série, t. V, p. 435; 1896), puisque, comme dans celle-ci, on y mesure l'induction et le champ par deux déviations du galvanomètre balistique; l'élimination du flux dû au fer se faisait ici facilement, le cylindre à étudier étant creux.

confirment les prévisions basées sur la variation de la perméabilité; mais il nous serait difficile de chercher ici à comparer de plus près la théorie et l'expérience comme nous l'avons fait dans le cas des conducteurs non magnétiques; une théorie complète exigerait en effet que l'on tienne compte d'une manière précise de cette variation de la perméabilité, dont les lois ne sont pas encore connues.

Les phénomènes d'hystérésis introduisent d'ailleurs une autre difficulté dans le problème; malgré les nombreuses recherches auxquelles ils ont donné lieu, ces phénomènes sont encore mal connus; nous allons étudier maintenant une de leurs manifestations, l'énergie dissipée dans l'aimantation.

DEUXIÈME PARTIE.

SUR L'ÉNERGIE DISSIPÉE DANS L'AIMANTATION.

I. — HISTORIQUE.

Les premières expériences relatives à l'énergie dissipée dans l'aimantation ont été celles de Jamin et Roger ⁽¹⁾; les auteurs observaient au moyen d'un thermomètre sensible l'échauffement du noyau d'un électro-aimant dont la bobine était parcourue par un courant interrompu.

Cazin a fait sur ce sujet de nombreuses expériences ⁽²⁾; il employait des tubes de fer placés dans le réservoir d'un thermomètre à air, entouré lui-même d'une bobine parcourue par un courant interrompu; mais il semble ne s'être aucunement préoccupé du rôle des courants d'induction.

(1) JAMIN et ROGER, *Comptes rendus*, t. LXXV, p. 1265; 1869.

(2) CAZIN, *Ann. de Ch. et de Ph.*, 5^e série, t. VI, p. 493; 1875.

C'est M. Borgmann ⁽¹⁾ qui a le premier essayé de séparer les deux phénomènes, en étudiant la quantité de chaleur mise en jeu dans des tubes de fer fendus suivant une génératrice et disposés, comme dans les expériences de Cazin, dans le réservoir d'un thermomètre à air. Le courant était interrompu cinq, dix ou vingt fois par seconde au moyen d'un mécanisme d'horlogerie : l'élévation de température fut à peu près proportionnelle au carré de l'aimantation induite et au nombre d'interruptions par seconde.

MM. Warburg et Hönig ont voulu comparer les quantités d'énergie dissipées dans un cycle parcouru lentement et dans une variation rapide ⁽²⁾; dans le premier cas, la quantité d'énergie était déduite de l'aire de la courbe d'aimantation et, dans le second, mesurée par une méthode calorimétrique; le thermomètre à air était remplacé par un thermomètre à éther. Afin d'éviter l'influence de la quantité de chaleur produite par les courants induits, ils employaient des faisceaux de fils fins (0^{mm}, 22 et 0^{mm}, 68 de diamètre). Leur conclusion est que, pour la fréquence utilisée, égale à 4, 2 et réalisée au moyen d'un commutateur, l'énergie dépensée par période est les $\frac{2}{3}$ environ de l'énergie dépensée dans un cycle lent. Les auteurs reconnaissent eux-mêmes les difficultés qu'il y avait à tirer une mesure en valeur absolue des indications de leur appareil.

M. Tanakadaté a entrepris la même comparaison ⁽³⁾; il observe l'élévation de température d'un anneau de fils de fer de 1^{mm}, 15 de diamètre formant le noyau d'une bobine parcourue par un courant alternatif, et en déduit, par un calcul complexe et peu sûr, la quantité de chaleur mise

(¹) J. BORGMANN, *Journ. de la Soc. physico-chimique russe*, t. XIV, p. 67; 1882. — *Journ. de Ph.*, 2^e série, t. II, p. 574; 1883.

(²) WARBURG et HÖNIG, *Wied. Ann.*, t. XX, p. 814; 1883.

(³) TANAKADATÉ, *Phil. Mag.*, 5^e série, t. XXVIII, p. 207; 1889.

en jeu par période; il emploie un couple thermo-électrique. Au lieu de $\frac{2}{3}$ il trouve, pour le rapport cherché, $\frac{8}{10}$.

Il est à remarquer que, dans le cours de ses expériences, M. Tanakadaté a fait varier dans de larges limites la fréquence du champ magnétique périodique; il a construit deux courbes représentant les variations de la quantité d'énergie dépensée dans une période en fonction de la valeur maximum du champ; cette quantité d'énergie était déduite, pour l'une des courbes, de l'aire des courbes d'aimantation et, pour l'autre, des expériences précédentes; cette dernière courbe comprend, sans discontinuité, des points déterminés pour des fréquences différentes; le rapport des ordonnées des deux courbes se maintient à peu près constant, voisin de $\frac{8}{10}$, de sorte qu'il résulterait des expériences de M. Tanakadaté que le considérable abaissement observé est indépendant de la vitesse des variations.

MM. J. et B. Hopkinson ⁽¹⁾ ont cherché à construire par points la courbe d'aimantation correspondant à une variation rapide du champ; le noyau employé était un paquet de fils de fer de $\frac{1}{4}$ de millimètre de diamètre, en forme de tore; un contact tournant monté sur l'axe de l'alternateur permettait de connaître, à une phase quelconque de la période, la différence de potentiel entre les extrémités d'une résistance R sans self-induction, faisant partie du circuit, ou entre celles de la bobine magnétisante; la première est égale à Ri , i étant l'intensité du courant à l'instant considéré, et la deuxième à $ri + \frac{d\varphi}{dt}$, r représentant la résistance de la bobine et φ le flux d'induction; on peut ainsi calculer $\frac{d\varphi}{dt}$ et construire une courbe représentant les variations de cette quantité pendant une période; il suffit

(1) J. et B. HOPKINSON, *The Electrician*, 9 septembre 1892.

d'intégrer cette courbe pour avoir la valeur du flux d'induction à chaque instant.

Les auteurs ont construit par ce procédé une courbe correspondant à 125 périodes par seconde : l'induction maximum est bien égale à celle que produit la même valeur du champ magnétisant atteinte après une variation lente, mais la courbe est légèrement déformée.

De nouvelles expériences entreprises pour rechercher la cause de cette déformation ont montré que la différence était plus grande entre les courbes correspondant aux fréquences 72 et 5 qu'entre celle-ci et la courbe statique (c'est-à-dire la courbe obtenue par la méthode balistique), d'où les auteurs concluent qu'on a affaire à un véritable effet de temps ⁽¹⁾.

La méthode de Hopkinson a été également employée par M. Breslauer ⁽²⁾; il a trouvé que la courbe statique différait nettement, dans toutes les parties de la période, du tracé obtenu pour une fréquence de 20 à 30; dans la partie montante cette dernière courbe est en retard sur la précédente; dans la partie descendante elle est au contraire en avance; il résulte de là que, pour obtenir l'aire de la courbe dynamique, il faut d'une part augmenter et d'autre part diminuer celle de la courbe statique de deux quantités qui, d'après le tracé donné par M. Breslauer, sont à peu près équivalentes, de sorte que les aires des deux courbes sont sensiblement les mêmes.

M. Steinmetz ⁽³⁾ a fait un grand nombre de mesures, dans le but de vérifier la loi qu'il a donnée pour représenter l'énergie dissipée dans un cycle d'aimantation, et qui

⁽¹⁾ J. HOPKINSON, WILSON et TYDALL, *Proc. of the Roy. Soc. of London*, t. LIII, p. 352; 1893.

⁽²⁾ MAX BRESLAUER, *Inaugural Dissertation*; Berlin, 1895.

⁽³⁾ CH. STEINMETZ, *Trans. of the american Inst. of el. eng.*, t. IX, p. 8; 1892.

se traduit par la formule

$$E = \alpha (B_1 - B_2)^{1,6},$$

dans laquelle B_1 et B_2 sont les limites entre lesquelles varie l'induction et α un coefficient dépendant de la substance magnétique employée. Il mesure la consommation d'énergie au moyen d'un wattsmètre.

Il semble difficile de tirer de ses expériences des indications précises, parce que, dans la plupart d'entre elles, l'énergie mise en jeu par les courants induits intervenant, Steinmetz a admis que l'énergie dissipée dans un cycle d'aimantation est une constante, quelle que soit la fréquence, et a cherché à représenter les résultats obtenus par l'expression

$$E = \alpha (B_1 - B_2)^{1,6} + AN (B_1 - B_2)^2;$$

le second terme se rapporte à l'effet calorifique des courants induits qui, d'après la théorie, augmente proportionnellement à la fréquence (il y aurait des réserves à faire sur ce dernier point, le résultat théorique n'étant établi que dans certains cas et pour des conducteurs non magnétiques); cependant, dans un cas où les courants induits ne paraissaient pas avoir d'importance, le noyau étant formé de lames de quelques dixièmes de millimètre d'épaisseur, les résultats obtenus se représentent par la formule

$$\alpha (B_1 - B_2)^x,$$

α croissant avec la fréquence et x gardant toujours une valeur voisine de 1,6; ces variations seraient à peu près rendues, d'après l'auteur, par la formule

$$\alpha = 0,0017 + 0,0016 N - 0,00000003 N^2.$$

En mesurant également au moyen d'un wattsmètre l'énergie perdue, M. Gray n'a pas trouvé de variation

sensible pour un même cycle entre les fréquences 50 et 130; il employait un noyau formé de feuilles de tôle de 0^{mm},16 d'épaisseur, isolées les unes des autres par des feuilles de papier ⁽¹⁾.

M. Ewing ⁽²⁾ a imaginé un appareil qui trace automatiquement les courbes d'aimantation, et dont le principe est le suivant : un miroir peut être animé de mouvements de rotation autour de deux axes rectangulaires, l'un de ces mouvements étant commandé par le courant magnétisant et l'autre par l'aimantation induite. Un fil, parcouru par le courant magnétisant, est placé entre les pôles d'un aimant permanent; un autre fil, parcouru par un courant constant, est placé dans un entrefer pratiqué dans le circuit magnétique dont fait partie la pièce à étudier : ce sont les mouvements de ces deux fils qui sont communiqués au miroir.

Un rayon lumineux réfléchi sur ce miroir trace une courbe sur un écran ou sur une plaque photographique. Les courbes fermées ainsi obtenues ont une allure très différente suivant qu'elles sont parcourues lentement ou rapidement, tout au moins pour les noyaux employés par M. Ewing; il ne précise pas la forme de ces noyaux, mais il semble que les résultats qu'il indique, très brièvement d'ailleurs, aient été obtenus en opérant sur des masses magnétiques compactes. Pour un cycle parcouru très lentement, on obtient une courbe pointue, analogue à la forme classique donnée par les méthodes ordinaires, tandis que, pour une période de 0^s,43, c'est-à-dire encore relativement très longue, la courbe est aplatie, comme si l'aimantation n'atteignait qu'une valeur beaucoup plus faible que dans le cas précédent, mais en même temps beaucoup plus renflée, l'aire étant notablement plus grande que dans le

(1) TH. GRAY, *Proceed. of the Roy. Soc. of London*, t. LVI, p. 48; 1894.

(2) EWING, *The Electrician*, 26 mai 1893.

premier cas; l'auteur signale ce fait que, si la rapidité est encore augmentée, l'aire de la courbe passe par un maximum et décroît ensuite.

Jusqu'ici, ce magnétographe semble plutôt applicable à des expériences de démonstration qu'à des mesures précises; il est difficile de connaître le retard dû à l'inertie des différentes pièces, qui varie sans doute avec la rapidité de leur déplacement.

La plupart de ces expériences ont eu pour but la comparaison entre un cycle statique et un cycle dynamique, qui ne semble pas comporter une grande précision; en effet, les méthodes de mesure sont tout à fait différentes dans les deux cas, de sorte que, pour que la comparaison entre les résultats soit possible, chacune des mesures doit être faite en valeur absolue, ou tout au moins les deux séries de mesures ramenées aux mêmes unités.

Or, les mesures en valeur absolue présentent ici de nombreuses difficultés: l'étude d'un cycle statique nécessite l'étalonnage d'un galvanomètre balistique, la mesure de la section du noyau magnétique, la connaissance de l'intensité du courant utilisé; de plus le retard de l'aimantation sur le champ exige, surtout lorsqu'on a affaire à un noyau magnétique compact, une grande prudence dans l'emploi de la méthode balistique; enfin plusieurs physiciens et notamment Ewing ⁽¹⁾ ont montré que les courbes d'aimantation diffèrent beaucoup suivant qu'elles correspondent à la première application ou à des applications successives d'un même cycle du champ magnétique; il en résulte que les seuls résultats corrects sont ceux déduits des mesures faites lorsque le cycle a acquis sa forme définitive, ce que paraissent avoir négligé la plupart des expérimentateurs.

La mesure d'un cycle dynamique en valeur absolue est

(1) EWING, *Magn. Induction in Iron*, p. 325; London, 1894.

également délicate : si l'on s'adresse à une méthode calorimétrique, il faut opérer des corrections toujours incertaines, à cause des pertes de chaleur par rayonnement et par conductibilité ; de plus il faut connaître les constantes spécifiques des corps qui entrent dans la construction de l'appareil, et savoir exactement dans quelles conditions ils interviennent dans l'effet thermique observé. Si l'on emploie une méthode électrique, on doit étalonner un électromètre ou un galvanomètre, mesurer plusieurs résistances, connaître la fréquence du courant employé, mesurer la section du noyau, intégrer une courbe.

Au lieu de chercher à comparer un cycle statique et un cycle dynamique, je me suis proposé de comparer entre eux des cycles dynamiques correspondant à différentes vitesses de variation ; le problème ainsi posé est plus simple et plus facilement abordable : son étude n'en donnera pas moins d'utiles renseignements sur toute cette question.

II. — EXPOSÉ DE LA MÉTHODE.

La méthode employée a été, avec quelques modifications, celle de MM. Hopkinson, dont j'ai exposé plus haut le principe, et qui est elle-même une application du procédé de M. Joubert pour l'étude des courants alternatifs (1). Elle était appliquée de la façon suivante :

(1) J'ai fait d'abord, par une méthode calorimétrique, plusieurs séries d'expériences, dont je ne parlerai pas ici, voici pourquoi : les expériences antérieures faites par une méthode calorimétrique ont conduit à ce résultat que l'énergie dissipée dans un cycle rapide serait plus faible que l'énergie dissipée dans un cycle lent, lorsque l'influence des courants induits est presque totalement supprimée (Warburg et Hönig, Tanakadaté) ; j'étais arrivé moi-même à une conséquence analogue, car j'avais trouvé que l'énergie dissipée diminue quand la fréquence augmente ; dans un Travail publié très récemment, M. Weihe (*Wied. Ann.*, t. LXI, p. 578; 1897) trouve aussi des nombres plus faibles par une méthode calorimétrique que par une méthode électrique, et se demande si les deux méthodes mesurent bien la même

Le circuit parcouru par le courant alternatif comprend essentiellement : 1° une bobine enroulée sur le noyau magnétique à étudier, ayant la forme d'un anneau; soit r la résistance de cette bobine; 2° une résistance R sans self-induction sensible. On mesure à un moment donné les différences de potentiel entre les extrémités de la résistance R et entre celles de la bobine magnétisante, qui sont respectivement égales à Ri et à $ri + \frac{d\varphi}{dt}$, φ représentant le flux d'induction total et i l'intensité du courant à l'instant considéré; on peut ainsi calculer la valeur de $\frac{d\varphi}{dt}$ à cet instant.

Le dispositif employé est celui qui a servi, dans la première partie de mes expériences, pour l'étude du courant alternatif, complété par les dispositions suivantes :

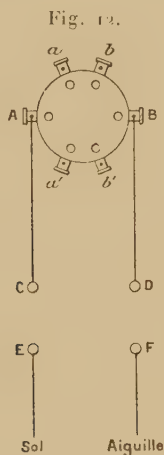
Les extrémités de la bobine magnétisante et de la résistance R sont reliées respectivement aux deux paires de bornes ab et $a'b'$ d'un commutateur à mercure à six godets, dont les bornes opposées A et B sont reliées respectivement au sol et à l'aiguille d'un électromètre (*fig. 12*); un pont à bascule dont les deux branches sont isolées permet de réunir A et B à a et b , ou à a' et b' . Dans chaque

quantité. On peut, en effet, supposer qu'une partie de l'énergie dissipée se trouve sous une forme insensible au calorimètre.

Indépendamment de cette question, qui exigerait de nouvelles recherches, la méthode calorimétrique présente des causes d'erreur systématiques : les pertes de chaleur par rayonnement ou conductibilité augmentent avec la fréquence, la quantité de chaleur mise en jeu en un temps donné étant d'autant plus grande que la fréquence est elle-même plus grande; en poursuivant mes premières expériences avec une disposition calorimétrique différente, j'ai trouvé des nombres différents des premiers.

J'ai donc employé, dans les expériences qui suivent, une méthode électrique ne présentant pas de difficulté d'interprétation, et où aucune cause d'erreur systématique n'intervient. Elle permet, d'ailleurs, l'étude de plusieurs questions importantes, en dehors de celle de la variation de l'énergie dissipée.

position on fait deux lectures en intervertissant les communications (au moyen des godets à mercure C, D, E, F), pour éliminer, comme nous l'avons vu, une force élec-



tromotrice étrangère, de sorte que la détermination d'une valeur de $\frac{d\varphi}{dt}$ exige quatre lectures.

Dans le circuit se trouve une deuxième résistance R' sans self-induction, qui sert à mesurer, au moyen d'un autre électromètre, l'intensité efficace du courant alternatif. Dans toutes les expériences qui suivront, cette intensité a été maintenue constante. Les échelles des deux électromètres étaient voisines l'une de l'autre, et avant chaque lecture de la déviation du premier électromètre on vérifiait que celle du second n'avait pas varié; un rhéostat placé sous la main permettait de ramener l'intensité du courant à la valeur convenable, s'il s'était produit un léger changement.

La courbe représentant $\frac{d\varphi}{dt}$ en fonction du temps était construite au moyen de dix-neuf points ou davantage, c'est-à-dire que l'alidade était déplacée de 5° en 5° sur le cercle

divisé (90° correspondant à une période complète), ou à des intervalles plus courts lorsque la forme de la courbe exigeait plus de détail. L'intégration de cette courbe se faisait en comptant les petits carrés et leurs fractions sur le papier quadrillé au millimètre qui servait à sa construction; l'intégrale totale divisée par 4 donne le maximum de φ ; en partant ensuite d'un maximum, c'est-à-dire d'un des zéros de $\frac{d\varphi}{dt}$, et en procédant de proche en proche, on obtenait les valeurs de φ de 5° en 5° ; on construisait par points les courbes d'induction en portant en ordonnées les valeurs de φ et en abscisses des quantités proportionnelles à i ; l'aire embrassée par ces courbes fermées était mesurée de la même façon que plus haut.

Les conditions des expériences ont toujours été les mêmes, les noyaux magnétiques étant simplement substitués l'un à l'autre. Les deux résistances sans self-induction étaient constituées par des fils de maillechort recouverts de soie, repliés sur eux-mêmes et enroulés ensuite sur des bobines; elles avaient pour valeur $R = 52^\omega$, 43 et $R' = 46^\omega$, 23. Les bobines magnétisantes se composaient d'une seule couche du même fil de cuivre recouvert, de 0^{mm} , 5 de diamètre, de sorte que les limites du champ ont eu dans tous les cas sensiblement les mêmes valeurs; les résistances de ces bobines (correspondant aux cinq noyaux employés) étaient 6^ω , 52; 11^ω , 12; 10^ω , 44; 8^ω , 42 et 10^ω , 55.

L'intensité efficace constante était égale à 0^{amp} , 5, ce qui correspondait à un champ oscillant entre les valeurs $\pm 11,4$ C.G.S environ.

Remarques. — I. Pour pouvoir comparer entre elles les aires des différentes courbes il est nécessaire de faire les deux réductions suivantes:

1° Les valeurs de φ obtenues au moyen de l'intégration des courbes $\frac{d\varphi}{dt}$ ne sont comparables entre elles que si on

les divise par la fréquence; en effet, les quantités portées en abscisses dans la construction de ces dernières courbes sont les nombres de degrés dont l'alidade a tourné; or, à chaque degré correspond un intervalle de temps égal à $\frac{1^s}{90 \times N}$; il faudrait donc, pour ramener les intégrales des différentes courbes à des valeurs comparables, diviser les abscisses par N ; il est plus commode de conserver toujours les mêmes abscisses, de construire directement les courbes et de diviser ensuite par N la surface trouvée.

2° Les valeurs de $\frac{d\varphi}{dt}$ et du courant sont mesurées au moyen du même électromètre; les indications de cet électromètre ne sont comparables entre elles que si sa sensibilité ne varie pas; or, la pile de charge est constituée par de petits accumulateurs dont la force électromotrice peut varier; avant et après chaque série d'expériences l'électromètre était donc étalonné au moyen d'éléments Gouy, et l'on ramenait les indications à ce qu'elles auraient été si la sensibilité était toujours restée la même.

II. Le quart de cercle sur lequel l'alidade était déplacée est resté le même dans toutes les mesures ⁽¹⁾; ce quart de cercle comprenait un peu plus d'une période, sans doute à cause d'un défaut de construction de l'alternateur, de sorte que, dans la construction d'une courbe fermée, le dernier point venait un peu en deçà du premier; d'ailleurs, dans presque toutes les expériences, les courbes se sont parfaitement fermées sur elles-mêmes; dans deux ou trois cas seulement il y a eu un très faible écart.

III. La vitesse de l'alternateur était mesurée avec un compteur de tours; cette détermination était répétée

(1) Le ressort latéral fixe, qui devait être remis en place avant chaque série d'expériences, n'occupait pas toujours exactement la même position, ce qui a causé quelques déplacements des extrémités de la période.

quatre fois pendant une période, et le nombre pris comme valeur de N était la moyenne des quatre nombres ainsi obtenus qui, comme nous le verrons, différaient assez peu les uns des autres; je crois cependant que c'est l'évaluation de cette vitesse qui est la cause d'erreur la plus importante dans ces expériences.

III. — RÉSULTATS.

Les noyaux magnétiques employés avaient la forme d'anneaux; l'un d'entre eux était un tore plein à section circulaire; les autres étaient constitués par des fils de fer recuits ayant respectivement pour diamètre moyen 2^{mm} , 68; 1^{mm} , 57; 0^{mm} , 5; et 0^{mm} , 2; ces fils étaient d'abord emballés, puis plongés à plusieurs reprises, sans être serrés, dans de la paraffine très chaude qui restait en couche mince sur les fils; on les réunissait ensuite en les noyant dans la paraffine, et l'on donnait à la section la forme d'un rectangle arrondi; ces précautions évitaient des contacts assez suivis pour que des courants d'induction pussent se propager entre les fils.

Lorsqu'on passe d'un noyau à l'autre, la division de la masse magnétique augmentant, l'influence des courants de Foucault se fait de moins en moins sentir, et les résultats tendent vers ceux qui correspondraient aux phénomènes magnétiques seuls.

Interprétation de l'aire des courbes obtenues en portant en abscisses l'intensité du courant primaire et en ordonnées le flux d'induction total φ . — L'aire de ces courbes représente la somme des quantités de chaleur créées par la variation même de l'aimantation et par l'effet Joule des courants induits. En effet, le flux d'induction total φ peut être considéré comme la somme de deux parties, l'une d'elles étant le flux d'induction dû aux courants induits dans le noyau; en désignant par i' l'in-

tensité d'un courant induit particulaire, et par M le coefficient d'induction mutuelle du courant primaire i et du courant particulaire i' , on aura

$$\varphi = \psi + \Sigma M i'.$$

D'ailleurs, la différence de potentiel électrique qui existe à un moment donné entre les deux extrémités de la bobine magnétisante est

$$e = ri + \frac{d\varphi}{dt},$$

r désignant la résistance de cette bobine; l'énergie dépensée entre ces deux points pendant le temps dt est $ei dt$, et, pendant une période,

$$E = \int_0^T ei dt = \int_0^T ri^2 dt + \int_0^T i \frac{d\varphi}{dt} dt = \int_0^T ri^2 dt + \int_0^T i d\varphi.$$

En remplaçant $d\varphi$ par sa valeur

$$d\varphi = d\psi + \Sigma M di',$$

on obtient

$$E = \int_0^T ri^2 dt + \int_0^T i d\psi + \Sigma \int_0^T M i di'.$$

Cette somme comprend : 1° l'effet Joule du courant primaire, représenté par le premier terme; 2° la quantité de chaleur créée dans la variation de l'aimantation, représentée par le deuxième terme; 3° l'effet Joule des courants induits, représenté par le troisième terme. L'aire des courbes précédentes représente $\int_0^T i d\varphi$ et comprend ainsi les deux derniers termes (1).

(1) On peut vérifier directement que le troisième terme représente bien l'effet Joule des courants induits. Il suffit pour cela de montrer que

$$\int_0^T r' i'^2 dt = \int_0^T M i di',$$

en désignant par r' la résistance du circuit parcouru par le courant

Les courants induits non seulement produisent par eux-mêmes un effet calorifique considérable, mais modifient de plus la valeur de l'effet calorifique de la variation de l'aimantation; ils exercent en effet une action protectrice que nous avons étudiée dans la première partie de ce travail, de sorte que le champ et par suite l'induction varient dans la section de chacun des fils; d'autre part, toujours par suite de l'action des courants induits, le champ en un point de la section est en retard sur le champ

particulaire i' . Appelons L' la self-induction de ce circuit. On montre facilement (MASCART, *El. et Magn.*, t. I, p. 615) que, si le courant primaire est de la forme $i = I \sin \omega t$, le courant secondaire est représenté par $i' = I' \sin(\omega t - \alpha)$, avec les relations

$$\alpha = \frac{\pi}{2} + \arctang \frac{L' \omega}{r'},$$

$$\frac{I'^2}{I^2} = \frac{M^2 \omega^2}{r'^2 + L'^2 \omega^2}.$$

Ceci posé, la première intégrale a pour valeur

$$\int_0^T r' I'^2 \sin^2(\omega t - \alpha) dt = \frac{r' I'^2}{2};$$

la deuxième peut s'écrire :

$$\begin{aligned} \int_0^T M I \sin \omega t I' \omega \cos(\omega t - \alpha) dt &= M I I' \omega \int_0^T \sin \omega t \cos(\omega t - \alpha) dt \\ &= \frac{M I I' \omega \sin \alpha}{2} \\ &= \frac{M I I' \omega}{2} \cos \left(\arctang \frac{L' \omega}{r'} \right), \end{aligned}$$

c'est-à-dire, en remplaçant le cosinus par sa valeur en fonction de la tangente,

$$\frac{M I I' \omega}{2} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{L'^2 \omega^2}{r'^2}}} = \frac{r' I'}{2} \frac{M \omega I}{\sqrt{r'^2 + L'^2 \omega^2}};$$

le dernier facteur est égal à I' , c'est-à-dire que la deuxième intégrale a bien la même valeur $\frac{r' I'^2}{2}$ que la première.

à la surface, la différence de phase augmentant avec la distance à la surface et avec la fréquence : pour ces deux raisons la quantité ψ qui figure dans l'expression précédente est une somme complexe. Nous allons voir intervenir ces différents effets dans les résultats obtenus.

Il serait fastidieux de rapporter ici en détail les résultats numériques des nombreuses séries d'expériences faites avec les différents noyaux ; je donnerai seulement, comme exemples, les nombres relatifs à la série d'expériences qui correspond pour chacun d'entre eux à la plus basse fréquence employée (voisine de $N = 20$).

Je rappelle que R représente la résistance sans self-induction qui sert à la mesure du courant, r celle de la bobine magnétisante, φ le flux d'induction total, et N la fréquence ; dans la première colonne verticale sont indiqués les angles dont le contact mobile a tourné par rapport à l'alternateur.

1° Noyau plein.

	Degrés.	Ri.	$ri + \frac{d\varphi}{dt}$	$\frac{d\varphi}{dt}$	φ .	$\frac{\varphi}{N}$.
	0	-31,76	-14,28	-10,32	+ 22,8	+ 1,24
	5	-39,66	-14,46	- 9,52	- 76,7	- 4,18
	10	-43,76	-13,21	- 7,76	-165	- 8,99
	15	-39,91	- 9,9	- 4,94	-230,9	-12,57
	20	-32,08	- 6,7	- 2,71	-268,6	-14,63
	25	-18,43	- 2,72	- 0,43	-285,4	-15,53
	30	- 6,62	+ 2,09	+ 2,91	-274	-14,92
N...	18,09					
	18,47					
	18,22					
	18,34					
	43	+32,11	+14,28	+10,29	- 31,2	- 1,70
	50	+40,05	+14,45	+ 9,47	+ 68	+ 3,70
	55	+42,67	+12,97	+ 7,61	+153,5	+ 8,36
	60	+39,21	+ 9,78	+ 4,91	+216,5	+11,79
	65	+30,49	+ 6,15	+ 2,36	+252,1	+13,73
	70	+19,85	+ 2,19	- 0,27	+261,1	+14,22
	75	+ 5,16	- 2,88	- 3,52	+242,9	+13,23
	80	-10,28	- 9,47	- 8,19	+184,4	+10,04
	85	-18,28	-13,38	-11,1	+ 84,4	+ 4,60
	90	-33,66	-14,41	-10,22	- 26,2	- 1,43
Moy.	18,36					

2° Noyau de fils de 2^{mm}, 68.

Degrés.	Ri.	$ri + \frac{d\varphi}{dt}$.	$\frac{d\varphi}{dt}$.	φ .	$\frac{\varphi}{N}$.
0	-21,79	-43,02	-38,4	+ 65,8	+ 3,05
5	-31,4	-46,25	-39,38	- 33,2	- 1,54
10	-41,45	-41,05	-32,27	-124,3	- 5,77
15	-44,64	-30,35	-20,9	-191,3	- 8,87
20	-41,15	-18,15	+ 9,44	-228,1	-10,58
25	-32,78	- 6,62	+ 0,33	-238,1	-11,05
30	-18,55	+ 3,3	+ 7,22	-228	-10,60
35	- 1,45	+14,05	+14,35	-201,6	- 9,35
40	+13,55	+27,8	+31,91	-151,8	- 7,04
45	+22,54	+42,68	+37,91	- 74,7	- 3,46
50	+33,3	+45,9	+38,84	+ 22,9	+ 1,06
55	+41,38	+41,08	+32,31	+112,4	+ 5,21
60	+44,55	+28,6	+19,17	+176	+ 8,17
65	+39,9	+16,25	+ 7,8	+208,8	+ 9,69
70	+30,5	+ 4,35	- 2,12	+214,1	+ 9,93
75	+14,93	- 5,46	- 8,62	+199,1	+ 9,24
80	- 2,5	-17,1	-16,57	+167	+ 7,75
85	-15,75	-33,3	-30	+108,2	+ 5,02
90	-25,36	-45,08	-39,7	+ 19,6	+ 0,91

N... $\left\{ \begin{array}{l} 21,36 \\ 21,43 \\ 21,62 \\ 21,81 \end{array} \right.$
Moy. 21,55

3° Noyau de fils de 1^{mm}, 57.

Degrés.	Ri.	$ri + \frac{d\varphi}{dt}$.	$\frac{d\varphi}{dt}$.	φ .	$\frac{\varphi}{N}$.
0	-19,45	-42,46	-38,6	+ 48,8	+ 2,39
5	-27	-49,65	-44,28	- 58,3	- 2,85
10	-36,45	-42,65	-35,4	-161,9	- 7,92
15	-46,5	-18,5	- 9,24	-213,3	-10,44
20	-44,4	- 7,3	+ 1,54	-220,5	-10,79
25	-33,05	- 2,75	+ 3,82	-214,7	-10,51
30	-18,75	+ 3,3	+ 7	-202,2	- 9,89
35	- 1,66	+13,32	+13,66	-177,7	- 8,69
40	-12,15	+26,75	+24,35	-131,4	- 6,43
45	+19,75	+43,25	+39,33	- 53,6	- 2,62
50	+27,8	+50	+44,47	+ 53,2	+ 2,60
55	+37,85	+40,85	+33,33	+153,8	+ 7,53
60	+47,3	+16,65	+ 7,23	+199,8	+ 9,78
65	+43,35	+ 6,55	- 2,07	+203,2	+ 9,94
70	+31,15	+ 2,16	- 4,03	+195	+ 9,54
75	+15	- 5,4	- 8,4	+179,3	+ 8,77
80	- 2,1	-16,2	-12	+153,8	+ 7,75
85	-14,23	-30,75	-27,92	+105,6	+ 5,17
90	-21,9	-46,8	-42,44	+ 16,1	+ 0,79

N... $\left\{ \begin{array}{l} 20,40 \\ 19,89 \\ 20,85 \\ 20,59 \end{array} \right.$
Moy. 20,43

4° Noyau de fils de 0^{mm}, 5.

Degrés.	Ri.	$ri + \frac{d\varphi}{dt}$.	$\frac{d\varphi}{dt}$.	φ .	$\frac{\varphi}{N}$.
0	-24,33	-28,93	-25,05	-65,8	-3,45
5	-38,57	-12,33	-6,14	-142,4	-7,47
10	-45,1	-7,63	-0,4	-153,5	-8,05
15	-42,09	-6,23	+0,53	-153,2	-8,04
20	-34	-4,85	+0,61	-150,8	-7,92
25	-22,86	-2,46	+1,21	-146,5	-7,64
30	-7,5	+1,4	+2,6	-137,4	-7,21
35	+7,95	+7,6	+6,32	-115,2	-6,05
40	+16,73	+20,82	+18,14	-58,6	-2,98
45	+23,85	+28,7	+24,88	+56,1	+2,94
50	+40,72	+12,73	+6,2	+141,6	+7,43
55	+45,55	+7,55	+0,25	+152	+7,98
60	+41,74	+6,37	+0,32	+151,7	+7,96
65	+32,75	+4,55	-0,7	+149	+7,82
70	+20,72	+2,14	-1,18	+143,9	+7,55
75	+5,35	-2	-2,85	+134,7	+7,07
80	-10	-9,2	-7,6	+109,4	+5,74
85	-18,21	-23,13	-20,21	+45,1	+2,36
90	-25,95	-28,06	-24	-69	-3,62

N... $\left\{ \begin{array}{l} 18,03 \\ 19,12 \\ 19,63 \\ 19,43 \end{array} \right.$
Moy. 19,05

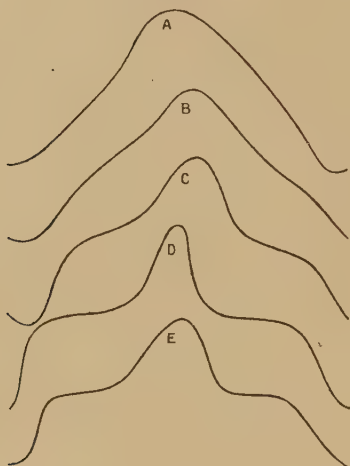
5° Noyau de fils de 0^{mm}, 2.

Degrés.	Ri.	$ri + \frac{d\varphi}{dt}$.	$\frac{d\varphi}{dt}$.	φ .	$\frac{\varphi}{N}$.
0	-15,35	-97	-93,9	-17,9	-0,76
5	-22	-92,1	-87,7	-110,2	-4,66
10	-53,2	-19,23	-8,56	-169,7	-7,17
15	-48,6	-9,7	+0,07	-172,9	-7,31
20	-34,2	-5,2	+1,67	-172	-7,27
25	-16,05	+1	+4,22	-169,8	-7,18
30	-0,95	+12,6	+12,8	-162,8	-6,88
35	+12,35	+45,5	+43	-137,5	-5,81
40	+13,75	+78,95	+76,2	-77,5	-3,28
45	+15,55	+100,55	+97,44	+11,5	+0,49
50	+24,3	+85,25	+80,4	+106,7	+4,51
55	+54,15	+17,45	+6,58	+150,5	+6,36
60	+46,45	+9	-0,34	+151,8	+6,42
65	+31,7	+4,25	-2,12	+151	+6,38
70	+11,95	-2,45	-4,86	+148	+6,26
75	-8	-17,45	-15,84	+139	+5,88
80	-12,65	-53	-50,5	+107	+4,52
85	-14,3	-83,2	-80,3	+30,7	+1,29
90	-16,5	-101,85	-98,54	-60,2	-2,54

N... $\left\{ \begin{array}{l} 22,64 \\ 23,42 \\ 24,5 \\ 24,06 \end{array} \right.$
Moy. 23,65

Dans la *fig.* 13 sont réunies les courbes qui repré-

Fig. 13.



sentent, pour les cinq séries précédentes d'expériences,

Fig. 14.

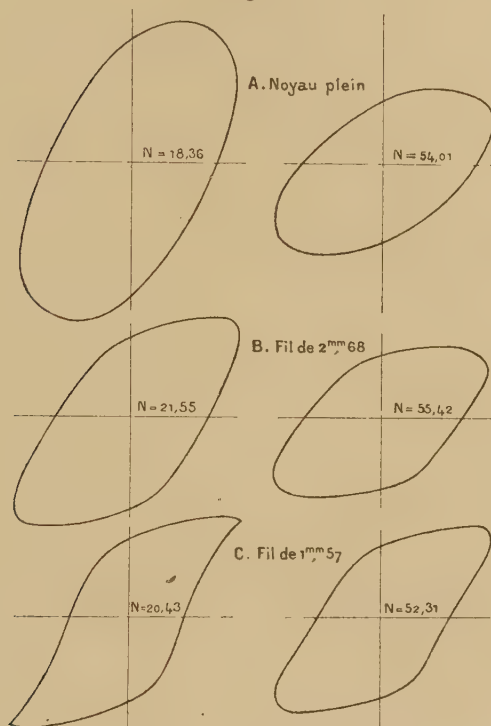


les variations de $\frac{d\varphi}{dt}$, et dans la *fig.* 14 les courbes repré-

sentant les variations du courant i . Dans ces deux séries de courbes les abscisses représentent l'angle dont le contact mobile a tourné par rapport à l'alternateur, c'est-à-dire, en somme, la fraction de la période.

Enfin, dans les *fig.* 15 et 16, on trouvera les courbes

Fig. 15.

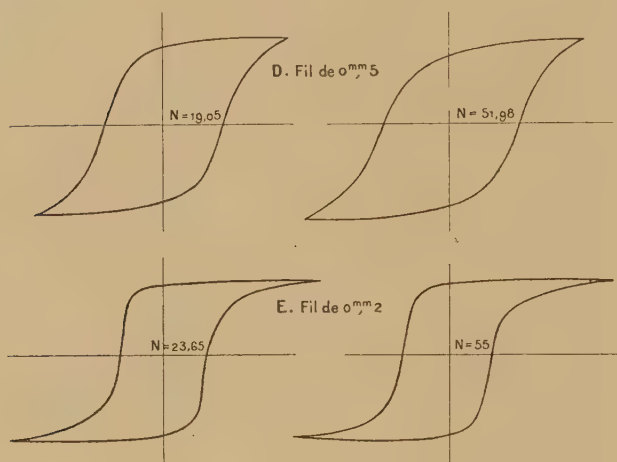


fermées représentant la variation pendant une période du flux d'induction total φ , en fonction de l'intensité du courant magnétisant; elles ont été construites en prenant pour ordonnées les valeurs de $\frac{\varphi}{N}$, c'est-à-dire des nombres comparables entre eux pour un même noyau, comme nous l'avons vu plus haut (celles dont je me servais pour la

M. 5

mesure de l'aire des courbes étaient naturellement construites à une plus grande échelle). J'ai ajouté aux courbes relatives aux cinq séries d'expériences précédentes celles qui correspondent, pour chaque noyau, à la

Fig. 16.



plus haute fréquence employée. On a ainsi les courbes relatives, pour chaque noyau, à la plus basse et à la plus haute fréquence, ce qui facilite les comparaisons.

Variation dans la forme des courbes. — L'aspect des courbes se modifie d'une manière très nette : avec le noyau plein, le flux d'induction varie d'une manière à peu près uniforme, la courbe $\frac{d\phi}{dt}$ ne présentant aucune sinuosité ; le maximum du flux d'induction n'est atteint que longtemps après celui du courant ; la courbe représentant les variations du flux d'induction a une forme arrondie ne rappelant aucunement celle de la courbe d'aimantation obtenue par des méthodes statiques. Avec le deuxième noyau nous trouvons une forme déjà notablement différente. Avec le troisième, la courbe $\frac{d\phi}{dt}$ se déforme, et la

courbe représentant les variations du flux d'induction s'amincit près de ses extrémités. Enfin, avec les deux derniers noyaux nous retrouvons pour cette dernière courbe, en apparence du moins, tous les caractères de la courbe d'aimantation statique; cependant le maximum du flux d'induction est toujours en retard sur celui du courant : nous reviendrons plus loin sur l'étude de ce retard.

Ces variations s'expliquent facilement par l'action des courants induits : lorsque le noyau est compact ou formé de fils assez gros, les courants induits étant très développés donnent une certaine importance relative au terme $\Sigma M i'$ qui figure dans l'expression $\psi + \Sigma M i'$ de φ ; de plus le retard du champ dans les couches intérieures est alors considérable, de sorte que les valeurs de B , dont il faut prendre la moyenne, sont réparties dans un large intervalle : de là la variation uniforme de φ .

L'intensité des courants induits augmente avec la fréquence; de là les variations qui se produisent dans la forme des courbes correspondant à un même noyau et à différentes fréquences, variations qui sont nettes surtout avec le troisième noyau (*fig. 15, C*).

Forme du courant. — Dans chacune des expériences, la courbe représentant les variations du courant pouvait être construite par points. Il n'y a pas de différence sensible entre les courbes correspondant à un même noyau et à différentes fréquences, de sorte que les limites entre lesquelles variait le champ sont restées à peu près les mêmes. La forme des courbes varie avec les différents noyaux; dans la *fig. 14* on a réuni les courbes correspondant aux cinq séries d'expériences dont les résultats numériques ont été donnés plus haut; on voit qu'elles sont d'autant plus régulières qu'elles correspondent à un milieu plus compact; la réaction des courants induits dans le fer tend à niveler les irrégularités du courant et à rapprocher sa forme de la sinusoïde théorique; c'est à cette action des

courants induits qu'est due la régularité des courbes du courant que nous avons obtenues dans la première Partie de ce travail, ces courants s'établissant avec une grande intensité dans les écrans de cuivre ou de fer employés.

Variation de la chaleur créée et du flux d'induction maximum. — Le Tableau suivant résume les variations de l'aire des courbes fermées représentant les variations du flux d'induction en fonction de l'intensité du courant magnétisant; cette aire représente, comme nous l'avons vu, la somme des quantités de chaleur créées par la variation de l'aimantation et par les courants induits; les réductions étaient opérées comme on l'a dit, de sorte que, pour un même noyau, les résultats indiqués sont rapportés aux mêmes unités; on a d'ailleurs, dans une seconde colonne, donné les valeurs relatives de l'aire S et du flux d'induction maximum Φ , rapportées, pour les deux premiers noyaux, à la première d'entre elles, et, pour les autres, à la moyenne de toutes les valeurs. (L'allure des résultats montre suffisamment pourquoi on a opéré ainsi.)

1° Noyau plein.

N.	S.		Φ .	
18,35	6,831	1	1,582	1
20,93	6,795	0,995	1,477	0,933
24,39	6,08	0,890	1,358	0,857
26,91	5,963	0,873	1,327	0,839
33,1	5,235	0,766	1,165	0,736
36,98	4,798	0,702	1,077	0,681
50,49	4,086	0,599	0,890	0,563
54,01	3,914	0,573	0,920	0,581

2° Noyau de fils de 2^{mm},68.

N.	S.		Φ .	
21,55	4,348	1	1,092	1
25,95	4,108	0,945	1,016	0,93

N.	S.		Φ.	
31,38	4,039	0,929	0,380	0,898
38,04	3,759	0,865	0,892	0,817
44,32	3,629	0,835	0,858	0,786
55,42	3,190	0,734	0,770	0,705

 3° Noyau de fils de 1^{mm}, 57.

N.	S.		Φ.	
20,43	3,441	0,946	1,081	1,041
27,64	3,608	0,986	1,085	1,046
36,41	3,578	0,983	1,033	0,996
36,61	3,770	1,036	1,034	0,997
42,84	3,737	1,027	1,056	1,018
45	3,692	1,015	0,989	0,953
52,31	3,559	0,978	0,964	0,930

 4° Noyau de fils de 0^{mm}, 5.

N.	S.		Φ.	
19,05	2,765	1,004	0,835	0,990
20,38	2,636	0,997	0,856	1,025
21,36	2,583	0,977	0,834	0,989
24,36	2,589	0,979	0,824	0,977
26,77	2,707	1,023	0,843	0,999
27	2,727	1,031	0,862	1,022
27,08	2,666	1,008	0,862	1,022
31,74	2,675	1,010	0,879	1,053
34,38	2,554	0,966	0,849	1,006
51,87	2,672	1,010	0,812	0,962
52	2,636	0,997	0,824	0,977

 5° Noyau de fils de 0^{mm}, 2.

N.	S.		Φ.	
23,65	2,012	1,02	0,755	1,031
27,05	1,94	0,984	0,728	0,994
32,86	2,056	1,042	0,742	1,013
42	1,93	0,978	0,724	0,989
55	1,92	0,973	0,730	0,997

Ainsi, pour les deux premiers noyaux l'énergie dissipée par période diminue lorsque la fréquence augmente, dans les limites de mes expériences, cette diminution étant beaucoup plus rapide avec le noyau plein qu'avec le second; pour le troisième, la variation est beaucoup moins considérable: l'énergie dissipée semble passer par un maximum pour une fréquence de 35 ou 40, et décroît lentement de part et d'autre; pour les deux derniers, la dissipation d'énergie reste constante; les écarts, par rapport à la moyenne, ne sont pas systématiques et sont dus aux erreurs d'expérience. J'ai fait avec l'un de ces deux noyaux un plus grand nombre d'expériences, pour mettre ce résultat hors de doute.

Le maximum du flux d'induction varie d'une façon analogue, aucune relation simple n'apparaissant cependant entre les deux variations.

L'expérience ne donne que la variation de l'énergie totale; il est difficile de prévoir le rôle du second terme, c'est-à-dire de l'énergie dépensée par les courants de Foucault, mais celui du premier terme, c'est-à-dire de l'énergie dissipée dans l'aimantation, résulte immédiatement de ce que nous avons dit plus haut: à mesure que la fréquence augmente, l'intensité du champ diminue de plus en plus dans les couches internes, de sorte que la valeur moyenne de l'induction magnétique et, par suite, l'énergie dissipée diminuent elles-mêmes; il résulte aussi de là une diminution du maximum de l'induction magnétique: ces variations sont considérables et expliquent les variations de même sens que nous avons trouvées pour l'énergie et le maximum du flux d'induction totale.

Lorsqu'on divise de plus en plus le noyau magnétique, l'importance des courants de Foucault diminue rapidement; la théorie montre que, si l'on suppose le champ réparti d'une façon uniforme dans tout le noyau, l'éner-

gie mise en jeu par les courants de Foucault est, à surface égale, inversement proportionnelle au nombre des fils qui composent le noyau ⁽¹⁾; ce résultat, bien qu'étant seulement une première approximation, semble prouver que cette quantité d'énergie est absolument négligeable dans les noyaux de fils fins employés ici. D'ailleurs, les résultats obtenus eux-mêmes conduisent à la même conséquence; en effet, lorsque les courants de Foucault ont une grande importance, la fréquence influant sur leur intensité et leur répartition agit par suite sur l'énergie dissipée, pour la double raison que nous avons indiquée plus haut: c'est bien ce que montrent les expériences faites avec les noyaux les moins divisés; si l'action de la fréquence est, comme l'expérience nous l'a montré, nulle pour les noyaux de fils fins, c'est que les courants de Foucault ont très peu d'importance, autrement leur variation sous l'action de la fréquence influerait sur l'énergie dissipée.

On arrive ainsi à cette conclusion que l'énergie mesurée, dans le cas des deux noyaux de fils fins, représente à très peu près l'énergie dissipée du fait de l'aimantation seule, et les résultats des expériences montrent que l'énergie ainsi dissipée par cycle est sensiblement indépendante de la fréquence.

Ce résultat, qui s'accorde avec ceux des expériences les plus récentes, dans lesquelles on a comparé un cycle statique et un cycle dynamique, et avec ceux des expériences de M. Gray, paraît au premier abord difficile à expliquer, si l'on se reporte aux résultats des expériences relatives aux écrans électromagnétiques; en effet, nous avons vu qu'avec des écrans de tôle épais seulement de 1^{mm} on obtient une protection énorme: si le phénomène était

(¹) J.-J. THOMSON, *Recent Researches in El. and Magn.*, p. 320; Oxford, 1893.

le même dans les tiges employées ici, la valeur moyenne du champ sur l'axe serait encore sensiblement inférieure à sa valeur à la surface, et il en résulterait, dans la dissipation d'énergie par cycle, une diminution assez considérable pour être mise en évidence par les expériences, au moins dans le cas du fil de $0^{\text{mm}},5$.

Cette contradiction apparente provient de ce que la protection exercée par un écran cylindrique d'une certaine épaisseur dépend, dans de très larges limites, du rayon de ce cylindre; pour nous en rendre compte, calculons cette protection pour une série de cylindres d'épaisseur constante et de rayon variable.

Nous avons vu qu'en appelant ρ la distance à l'axe d'un point d'un cylindre, et γ une variable dont l'expression est

$$\gamma = \sqrt{8\pi^2 \mu c N} \rho$$

la protection exercée par un cylindre creux est représentée par

$$\frac{\varphi_{\gamma_2}}{\varphi_{\gamma_1}},$$

φ_γ étant la fonction qui représente l'amplitude du champ magnétique, et γ_1, γ_2 les valeurs de la variable relatives aux surfaces extérieure et intérieure du cylindre. Pour les différents cylindres considérés ici, et dans les mêmes conditions, la différence $\gamma_1 - \gamma_2$, proportionnelle à $\rho_1 - \rho_2$, sera constante; nous allons prendre $\gamma_1 - \gamma_2 = 0,5$, et considérer les cylindres correspondant aux valeurs de γ_2 variant de $0,5$ en $0,5$; nous admettons que la fonction φ est égale à la fonction J_0 , ce qui suffit pour indiquer la marche des phénomènes.

γ_1	γ_2	γ_{y_1}	γ_{y_2}	$\frac{\gamma_{y_2}}{\gamma_{y_1}}$
0,5	0	1,00097	1	0,9991
1	0,5	1,0155	1,00097	0,9856
1,5	1	1,092	1,0155	0,930
2	1,5	1,229	1,092	0,889
2,5	2	1,511	1,229	0,813
3	2,5	1,95	1,511	0,775
3,5	3	2,58	1,95	0,756
4	3,5	3,43	2,58	0,751
4,5	4	4,62	3,43	0,744
5	4,5	6,23	4,62	0,740
5,5	5	8,45	6,23	0,737
6	5,5	11,5	8,45	0,734

La protection est donc presque nulle lorsque le rayon du cylindre est faible; elle augmente d'une façon très rapide d'abord, puis de plus en plus lente, quand le rayon du cylindre croît lui-même. Dans le cas du fer, on peut prendre $c = 10^{-4}$ et, comme valeur moyenne, $\mu = 10^8$; pour $N = 50$, par exemple, on aura ainsi

$$\gamma = \sqrt{8\pi^2 10^3 10^{-4} 50 \rho},$$

ou environ

$$\gamma = 20 \rho.$$

Le rayon des fils formant le quatrième noyau étant de $\frac{1}{4}$ de millimètre, si l'on voulait calculer la protection au centre, on aurait $\gamma_2 = 0$ et $\gamma_1 = 20 \times 0,025 = 0,5$; le Tableau précédent montre que cette protection est pratiquement nulle, tandis que, pour un cylindre creux ayant une épaisseur de $\frac{1}{4}$ de millimètre et un rayon de quelques millimètres seulement, la protection est déjà considérable. Le calcul précédent manque évidemment de précision, puisqu'il suppose constante la perméabilité magnétique dont la variation joue, au contraire, un rôle important; il suffit cependant à montrer que les résultats obtenus dans l'étude des écrans et dans celle de l'énergie

dissipée dans l'aimantation, paraissant au premier abord difficiles à concilier, s'accordent au contraire bien avec la théorie.

Retard du flux d'induction sur le champ. — Dans toutes les expériences précédentes, le maximum du flux d'induction s'est trouvé en retard sur le maximum du courant; son zéro est également en retard sur celui du courant, mais ce deuxième retard n'est pas particulier aux courbes dynamiques; il existe dans les courbes statiques, tandis que, dans celles-ci, le maximum de l'induction magnétique coïncide toujours avec celui du courant.

La détermination des zéros est facile : il suffit de noter les points où sont coupées par l'axe des abscisses les courbes représentant les variations du courant et du flux d'induction en fonction de l'angle dont a tourné l'alidade sur le cercle gradué, ce qui peut être fait avec une certaine précision. La position des maxima du flux d'induction peut aussi être fixée commodément, puisqu'elle est donnée par les zéros de la courbe $\frac{d\varphi}{dt}$, mais celle des maxima du courant doit être déterminée sur la courbe elle-même, c'est-à-dire d'une manière moins précise.

J'ai calculé, pour chaque série d'expériences, les retards des deux maxima du flux d'induction sur ceux du courant et pris la moyenne de ces deux retards; j'ai opéré de la même façon pour les zéros; lorsque les courbes étaient sensiblement rectilignes au voisinage de leur zéro, je calculais la position de celui-ci par proportionnalité, ce qui donnait une valeur plus approchée que celle qui aurait été lue directement sur la courbe.

Les retards ainsi obtenus sont exprimés en degrés du cercle divisé; les valeurs données plus loin sont les précédentes multipliées par 4, c'est-à-dire exprimées en degrés ordinaires. Il était intéressant de connaître aussi les retards absolus; si α est le retard en degrés, sa valeur en

temps est

$$\theta = \frac{\alpha}{360} \frac{1}{N}.$$

Le Tableau suivant indique : 1° le retard α , en degrés, du maximum du flux d'induction sur celui du courant; 2° le même retard en temps, θ ; 3° le retard β , en degrés, du zéro du flux d'induction sur celui du courant.

1° Noyau plein.

N.	18,36	20,93	24,39	26,91	33,1	39,68	50,49	54,01
α .	58°,28	56,88	61,32	57,2	58,7	51,1	57,2	54,5
θ .	8 ^s ,82.10 ⁻³	7,5	6,98	5,9	4,93	3,86	3,14	2,8
β .	57°,80	56,84	60,28	57	57,88	57	56,9	60,84

2° Noyau de fils de 2^{mm},68.

N..	21,55	25,95	31,38	38,04	44,32	55,42
α ...	36°,56	41,08	43,48	45,44	46	47,9
θ ...	4 ^s ,71.10 ⁻³	4,39	3,85	3,32	2,88	2,4
β ...	54°,8	55,24	58,56	57,68	58,76	61,80

3° Noyau de fils de 1^{mm},57.

N...	20,43	27,64	36,41	36,61	42,84	45	52,31
α ...	7°,92	7,48	16,44	11,84	13,68	18,68	24,88
θ ...	1 ^s ,07	0,75	1,25	0,90	0,88	1,15	1,32
β ...	49°,64	51,44	55,8	53	54,8	55,44	56,24

4° Noyau de fils de 0^{mm},5

N.	19,05	20,38	21,362	4,36	26,77	27	31,74	34,38	51,87	52
α .	4°,08	5,40	6,28	5,48	7,88	5,80	5,80	11,02	7,92	8,68
θ .	0 ^s ,57.10 ⁻³	0,74	0,81	0,63	0,81	0,60	0,51	0,89	0,42	0,46
β .	40°,4	40,64	41,64	42,3	42	43,2	44,12	44,4	47,2	

5° Noyau de fils de 0^{mm},2.

N.....	23,65	27,05	32,86	42	55
α	14°,52	12,20	12,48	10	8,28
θ	1 ^s ,7.10 ⁻³	1,21	1,06	0,84	0,41
β	53°,16	59,48	63	66,3	67,5

On ne peut songer à donner de ces résultats une interprétation complète, dans laquelle il faudrait faire intervenir, à côté des effets complexes de la rapidité de variation du champ, le rôle de l'hystérésis statique, dont les causes exactes et les lois sont encore inconnues.

Nous nous bornerons aux remarques suivantes :

1° Le retard, en degrés, du zéro du flux d'induction est sensiblement le même pour tous les noyaux et indépendant de la fréquence; il est cependant un peu plus faible pour le quatrième noyau et semble présenter pour le cinquième une faible variation avec la fréquence.

2° Le retard du maximum, en degrés, est d'autant plus grand que le noyau est plus compact. Nous retrouvons là l'influence des courants induits, qui, d'une part, ajoutent à l'induction magnétique un terme présentant sur le courant primaire un certain retard, et, d'autre part, produisent, en chaque point du noyau, un retard du champ augmentant avec la distance du point à la surface. Cet effet des courants induits croît avec la fréquence : nous voyons qu'en effet α augmente avec la fréquence pour le deuxième, le troisième et le quatrième noyau; cependant α reste à peu près constant pour le premier, ce qu'on peut expliquer ainsi : à mesure que la fréquence augmente, la différence de phase du champ dans les couches internes augmente elle-même; mais, en même temps, l'amplitude de ce champ diminue, de sorte que l'importance relative de l'induction dans les couches internes décroît; il est possible que ces deux effets se compensent dans le cas du premier noyau.

Pour le dernier noyau, α varie au contraire en sens inverse de la fréquence; il semble, à cause de l'état de division du noyau, que les courants induits n'aient plus là une influence sensible et que l'on ait affaire à un phénomène tout différent, à un retard de l'aimantation même sur le champ, distinct de celui qui est produit par l'action

des courants induits; si les retards observés étaient dus seulement à cette dernière action, ils devraient s'annuler pour des noyaux très divisés, ce qui n'est pas conforme aux résultats obtenus.

3° Le retard en temps décroît quand la fréquence augmente pour les deux premiers noyaux; il reste à peu près constant pour chacun des deux suivants; pour le noyau le plus divisé (¹), il décroît de nouveau, sa valeur pour les faibles fréquences étant notablement plus élevée que celles obtenues avec le noyau précédent.

Si donc on considère seulement le retard du maximum du flux d'induction sur celui du courant, on pourra résumer de la façon suivante les résultats obtenus: dans tous les cas on observe un retard, dans la production duquel interviennent, pour une certaine part, les courants induits, mais qui existe même dans le cas de noyaux très divisés, où ces courants sont extrêmement réduits.

Ces résultats peuvent être rapprochés de ceux de quelques observations de M. Breslauer; dans le travail cité plus haut, M. Breslauer a obtenu, avec un noyau formé de minces feuilles de tôle, dans des expériences faites à peu près pour la même fréquence ($N = 25$), les retards suivants du maximum du flux d'induction sur celui du courant (j'indique seulement les retards absolus)

$$0^s, 805.10^{-3} - 0,498 - 0,38 - 0,766 - 1,74,$$

dont la moyenne, $0^s, 84.10^{-3}$, est bien de l'ordre des résultats obtenus ici avec les noyaux les plus divisés.

(¹) Pour ce dernier noyau la position du maximum du courant a été déterminée avec plus de précision que pour les autres, les valeurs du courant ayant été observées de degré en degré (du cercle divisé) au voisinage des deux maxima.

En résumé, dans la première Partie de ce travail, j'ai étudié, dans des conditions simples, les écrans électromagnétiques; dans le cas des conducteurs non magnétiques, j'ai déterminé la variation de la protection avec la fréquence; j'ai profité de ce que la théorie peut alors être faite d'une façon complète pour en comparer les résultats avec ceux de mes expériences. Dans le cas du fer, j'ai mis en évidence, de plusieurs manières, l'influence considérable de l'intensité du champ employé, tout en continuant à étudier celle de la fréquence : lorsque, la fréquence restant constante, l'amplitude du champ magnétique augmente, la protection croît d'abord, passe par un maximum et décroît ensuite lentement; lorsque, l'amplitude restant constante, la fréquence augmente, la protection croît d'une manière continue, cette variation présentant une allure un peu différente de celle obtenue dans le cas des conducteurs non magnétiques.

Dans la seconde Partie, j'ai étudié les variations avec la fréquence de l'énergie dissipée par période dans un noyau magnétique soumis à un champ variable; pour les noyaux compacts, cette quantité d'énergie diminue lorsque la fréquence augmente, ce mode de variation s'expliquant par l'action des courants induits; pour les noyaux les plus divisés, dans lesquels l'énergie dissipée est due, très sensiblement, à l'aimantation seule, elle est indépendante de la fréquence. L'étude des variations du maximum du flux d'induction conduit aux mêmes résultats. Ce maximum est toujours en retard sur celui du courant, même pour les noyaux les plus divisés, ce qui semble prouver l'existence d'un retard effectif de l'aimantation sur le champ.

Ces expériences ont été effectuées au laboratoire de Physique du Collège de France; je suis heureux d'adresser ici à M. Mascart l'expression de la profonde reconnaissance que je lui dois pour l'intérêt qu'il a bien voulu prendre à mon travail et la bienveillance dont il n'a cessé

de faire preuve à mon égard; on me permettra aussi d'exprimer à mes excellents maîtres de l'École Normale, MM. Violle et Brillouin, mes sentiments de vive gratitude. M. Brillouin, qui a suppléé M. Mascart au Collège de France pendant le premier semestre de l'année 1896-97, m'a donné, à plusieurs reprises, de précieux conseils; je lui en exprime toute ma reconnaissance.

Note. — Démonstration de la formule $\Delta H = 4\pi\mu c \frac{\partial H}{\partial t}$.

Nous supposons, dans ce qui va suivre, les milieux homogènes, isotropes et de perméabilité magnétique constante.

Nous emploierons les notations suivantes :

F, G, H, potentiel vecteur;
 X, Y, Z, champ magnétique;
 P, Q, R, force électromotrice;
 u, v, w , courant;
 ψ , potentiel des masses électriques isolées;
 μ , perméabilité magnétique;
 c , conductivité.

Les équations fondamentales de Maxwell peuvent alors s'écrire ⁽¹⁾ :

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mu X = \frac{\partial G}{\partial y} - \frac{\partial H}{\partial z}, \\ \mu Y = \frac{\partial H}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial z}, \\ \mu Z = \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\partial G}{\partial x}, \end{array} \right.$$

d'où il résulte immédiatement

$$(1)' \quad \frac{\partial(\mu X)}{\partial x} + \frac{\partial(\mu Y)}{\partial y} + \frac{\partial(\mu Z)}{\partial z} = 0.$$

(1) MASCART et JOUBERT, *El. et Magn.*, 2^e édit., t. I, p. 666.

Puis

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} P = -\frac{\partial F}{\partial t} - \frac{\partial \psi}{\partial x}, \\ Q = -\frac{\partial G}{\partial t} - \frac{\partial \psi}{\partial y}, \\ R = -\frac{\partial H}{\partial t} - \frac{\partial \psi}{\partial z}, \end{array} \right.$$

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} 4\pi u = \frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y}, \\ 4\pi v = \frac{\partial Z}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial z}, \\ 4\pi w = \frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x}. \end{array} \right.$$

Dans un corps conducteur on a

$$u = cP, \quad v = cQ, \quad w = cR.$$

En différentiant les deux dernières équations (2), respectivement par rapport à z et à y et en les retranchant membre à membre, on a

$$(4) \quad \frac{\partial^2 X}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 X}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 Y}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 Z}{\partial x \partial z} = 4\pi c \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial G}{\partial z} - \frac{\partial H}{\partial y} \right).$$

En vertu de (1), le second membre est égal à $4\pi\mu c \frac{\partial X}{\partial t}$.

D'ailleurs (1)' donne, puisque μ est supposé indépendant de x, y et z ,

$$\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} = 0,$$

d'où, en différentiant par rapport à x ,

$$-\frac{\partial^2 Y}{\partial y \partial x} - \frac{\partial^2 Z}{\partial z \partial x} = \frac{\partial^2 X}{\partial x^2},$$

ce qui permet d'écrire le premier membre de (4),

$$\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 X}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 X}{\partial z^2}, \quad \text{ou} \quad \Delta X.$$

On a donc bien

$$\Delta X = 4\pi\mu c \frac{\partial X}{\partial t}$$

et, de même,

$$\Delta Y = 4\pi\mu c \frac{\partial Y}{\partial t},$$

$$\Delta Z = 4\pi\mu c \frac{\partial Z}{\partial t}.$$

C'est précisément la relation employée plus haut.

Vu et approuvé :

Paris, le 14 décembre 1897.

LE DOYEN DE LA FACULTÉ DES SCIENCES,

G. DARBOUX.

Vu et permis d'imprimer :

Paris, le 14 décembre 1897.

LE VICE-RECTEUR DE L'ACADÉMIE DE PARIS,

GRÉARD.



SECONDE THÈSE.

PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

Propriétés physiques et chimiques des dissolutions salines.

Vu et approuvé :

Paris, le 14 décembre 1897.

LE DOYEN DE LA FACULTÉ DES SCIENCES,
G. DARBOUX.

Vu et permis d'imprimer :

Paris, le 14 décembre 1897.

LE VICE-RECTEUR DE L'ACADÉMIE DE PARIS,
GRÉARD.

PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS ET FILS,
25379 Quai des Grands-Augustins, 55.

11